ELEMENTI
D'ALGEBRA E GEOMETRIA

DEL SIGNOR

CARLO BOSSUT

NUOVAMENTE TRADOTTI CON AGGIUNTE

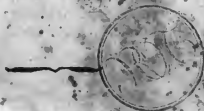
DA

FRANCESCO CARDINALI

Professore di Matematica Elementare

NEL R. LICEO DI TREVISO

Edizione fatta sull' ultima pubblicata dall' Autore in Francia.

PARTE PRIMA.

BOLOGNA 1808.

Pei Fratelli Masi e Compagni.

AL LETTORE.

È già decorso alquanto tempo, da che la traduzione degli Elementi d'Algebra e Geometria del Sig. Carlo Bossut venne pubblicata in Italia, ed ottenne un così favorevole applauso, che a molt' Illustri Professori tornò bene lo stabilirla per norma delle loro lezioni. Si entra però in lusinga, che la nuova edizione ch' è stata fatta su quella, la quale l' illustre Autore mise in Francia ultimamente alle stampe, debba sovranzare tutte le altre, stante i migliora-

menti dal medesimo autore introdotti; e gli schiarimenti e le giunte, che il Compilatore ha portato opinione d'inserirvi. Aggiungasi, che nel prendere ad operare questo libro, si è creduto bene di doversi attenere a quanto prescrive il paragrafo primo dei Piani dei Studj e di disciplina per le Università, promulgato in Milano nell' anno 1803, che in questa guisa s' esprime.

Spiega gli Elementi di Geometria piana e solida: una scelta de' principali teoremi d'Archimede; la Trigonometria piana; un compendio delle proprietà delle Sezioni coniche dimostrate sinteticamente. Indi gli elementi d'Algebra, cioè l'algoritmo algebrico, e la dottrina dell' equazioni sino al terzo grado inclusivamente: la teoria delle serie aritmetiche e geometriche; e mostra la struttura e l' uso delle tavole logaritmiche, e del canone logaritmico dei triangoli.

Frattanto questa prima parte comprenderà gli Elementi dell' Algebra. La seconda parte acchiuderà in se tutto che non avrà avuto luogo nella prima parte, e tutto che viene dai predetti Piani prescritto.

Sappia dunque il cortese Lettore, che per servire ai sù mentovati Piani, alcune cose si sono dovute togliere di mezzo, ed altre finalmente del tutto cambiare, od aggiungere.

INDICE

Delle cose contenute nella Prima Parte.

Gli editori pongono la presente edizione sotto la salvaguardia della legge di proprietà, de' 19 Fiorile anno IX (Era Francese) avendo consegnato le copie per le Biblioteche del Regno; e dichiarano che citeranno innanzi i Tribunali chiunque si facesse lecito di ristamparla o spacciarne altre edizioni.

INDICE

Delle cose contenute nella Prima Parte.

ELEMENTI D'ALGEBRA

CAPITOLO I.

Delle prime operazioni dell'Algebra.

1. Siccome nell'Aritmetica per rapporto alle cifre numeriche 1, 2, 3, 4, etc., così nell'Algebra per rapporto alle lettere dell'alfabeto italiano, o greco a, b, c, etc. α, β, γ, δ, etc. si fa la *somma*, la *sottrazione* la *moltiplicazione*, e la *divisione*. La somma si fa posto tra le quantità il segno $+$; così $a+b$, e $\alpha+\beta$ significano che a è aggiunta alla quantità b, e che α è aggiunta alla quantità β. Quando le lettere da sommarsi sono simili, come se ad a si dovesse aggiungere a, è chiaro che invece di $a+a$ si può scrivere $2a$. Così pure $2a+a=3a$, $3a+4a=7a$, ec.
I numeri che precedono le lettere, si chiamano i loro *coefficienti*. Così nel-

la quantità $3b$ il numero 3 è il coefficiente di b, come pure nella quantità $2a+4b$ i numeri 2 e 4 sono respettivamente i coefficienti di a e b. Una lettera senza coefficiente, s'intende sempre che abbia per coefficiente l'unità; così $1a=a$, e l'unità sempre si tralascia.

2 La sottrazione si fa posto tra le due quantità il segno $-$. Così $a-b$, e $\alpha-\beta$ significano che b e β sono sottratte da a, e α. Risguardo alle quantità simili è chiaro che $a-a=o$, $2a-a=1a=a$, $5a-2a=3a$, ec, o sia nella sottrazione delle quantità simili si deve prendere la differenza dei coefficienti. Se dalla quantità $3a$ si dovrà sottrarre $7a$ che è maggiore di quella, la sottrazione si farà togliendo $3a$ da $7a$, e ponendo il segno $-$ avanti il residuo $4a$. In fatti se da $b+3a$ io devo sottrarre $7a$, e scrivo $b-7a$ lasciando da parte $3a$, io ho sottratto troppo, e il di più è contenuto nelle $3a$ che devo aggiungere a b; quindi da b non devo sottrarre $7a$, ma $7a-3a=4a$, e perciò la giusta sottrazione mi darà $b+3a-7a=b-4a$, e quindi sarà

$3a - 7a = -4a$. Le quantità che hanno avanti il segno $+$ si chiamano *positive*, quelle che hanno avanti il segno $-$ si dicono *negative*.

Due cose devono notarsi: 1.° se una quantità non ha avanti alcun segno, vi si deve intendere il segno $+$, che in principio sempre si tralascia, poichè in vece di $+a+b$, si scrive $a+b$: 2.° nelle somme e sottrazioni non si deve avere alcun riguardo all' ordine delle lettere, poichè lo stesso significa $a+b$, e $b+a$; così pure $a-b$, e $-b+a$. Ma torna più conto per non far tanta confusione l' osservare l' ordine dell' alfabeto.

3. La moltiplicazione in Algebra si fa ponendo fra le quantità il segno $\times$, o un punto, o pure unendo insieme le lettere. Così la moltiplicazione di a per b si fa scrivendo $a \times b = a.b = ab$, e quest' ultima è la più in uso. Se vi saranno coefficienti numerici, questi si moltiplicheranno tra di loro per le comuni regole dell' aritmetica, ed il prodotto si porrà avanti alle lettere. Per esempio la moltiplicazione delle quantità $3a$, $5b$ ci darà $15ab$. Siccome

nell' Aritmetica, così nell' Algebra quelle quantità, che si moltiplicano tra loro si chiamano *fattori*, e ciò che risulta dalla moltiplicazione *prodotto*. Si avverta che l'ordine delle lettere nei prodotti non produce alcuna alterazione. Di fatti avendo due lettere a, b da moltiplicarsi, il prodotto $ab=ba$, perchè se $a=3$, e $b=4$, sarà $3.4=4.3=12$. Così $abc=acb=cab=cba$ e lo stesso si dica di quattro, cinque, ed un più gran numero di lettere.

Quelle quantità si dicono *semplici* o *monomie*, che non sono in alcun modo divise dai segni $+$ o $-$: *complesse* o *polinomie* quelle, che son composte di molte parti tra loro disgiunte dai segni $+$ o $-$. Così la quantità $2a+5b+7c-4d-2f$ è un polinomio, e le parti monomie $2a$, $5b$, $7c$, $4d$, $2f$ si chiamano i di lei termini. Più particolarmente si dice *binomio*, se è composto di due termini, *trinomio* se di tre, *quadrinomio*, se di quattro, ec.

4. La divisione essendo una operazione affatto contraria alla moltiplicazione, l'una distrugge quello che ha fatto l'altra: così la quantità a prima

moltiplicata per b, e poi divisa per b rimane la medesima. Quindi se una quantità monomia ab, o abc si deve dividere per a, la divisione si farà, se nel dividendo ab, o abc si cancellerà il divisore a, in modo che ab divisa per a sia eguale a b, ed aaa divisa per aa sia eguale ad a. Se il dividendo e il divisore avranno de' coefficienti numerici, si farà la divisione di questi con le regole solite. Così $15ab$ divisa per $3a$ ci darà il quoziente $5b$. La divisione si esprime con due punti fra il dividendo e il divisore, ma più spesso con una linea, in modo che a diviso per b, si scrive $a : b$, o pure $\frac{a}{b}$.

5. Fin qui si è parlato delle quantità monomie, ed abbiamo fatto sopra di queste le stesse operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione, e divisione che vennero fatte per le cifre numeriche. Ora passando alle quantità polinomie, incominciaremo dall' osservare che la somma nelle quantità complesse si fa come nelle semplici unendo le medesime con il segno $+$, e riducendo poscia i termini simili. Si debbano sommare le

quantità $3a+2bc-5c$, $2a-bc+7c$; la loro somma sarà $3a+2bc-5c+2a-bc+7c$, e riducendo $5a+bc+2c$. Per far più facilmente la somma, le quantità da sommarsi si scrivono una sotto l'altra, ponendo ciascun termine sotto il suo simile, e poi la somma si eseguisce gradatamente dalla sinistra alla destra, come nell'esempio seguente.

Esempio I.

Si debbano sommare le quantità $5a+3b-4c$, $2a-5b+6c+2d$; io le dispongo nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} 5a+3b-4c \\ \underline{2a-5b+6c+2d} \\ 7a-2b+2c+2d \end{array}$$

Poi siccome $5a+2a$ fa $7a$, scrivo in primo luogo $7a$ nella somma; similmente pongo $-2b$, perchè $3b-5b=-2b$; $+2c$ perchè $-4c+6c=2c$, e finalmente $+2d$, i quali termini formano la somma cercata.

Per esercizio degli studiosi porremo altri esempj.

Esempio II.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
4a & +5bc & -6cd & +8x & & \\
+5a & -4bc & & -6x & -2npx & +p \\
 & +2bc & +3cd & +2x & -4npx & -2p \\
+3a & & +4cd & & +6npx & -3p \\
\hline
12a & +3bc & +cd & +4x & & -4p
\end{array}
$$

Esempio III.

$$
\begin{array}{rrrr}
2ab & +3mc & -7d & -4ne \\
-5ab & -7mc & +9d & -6ne \\
-9ab & +10mc & -4d & +8ne \\
\hline
-12ab & +6mc & -2d & -2ne
\end{array}
$$

6. Abbiamo veduto che per sottrarre b da a si scrive $a-b$, cioè si muta il segno alla quantità che deve sottrarsi. Per mostrare che lo stesso ha luogo anche per le quantità complesse, supponghiamo che da a si debba togliere la quantità $b-c$; io dico, che questa sottrazione si farà mutati i segni alla quantità $b-c$, in modo che diventi $-b+c$, e poi presa la somma, che sarà $a-b+c$. Poichè se sottraggo b da a scrivendo $a-b$, io ho sottratto troppo, perchè la quantità da sottrarsi

non è b, ma $b-c$ minore di b, e quel di più che ho sottratto è $=c$. Convien dunque che aggiunga quello che ho tolto di più, cioè c, e perciò il cercato residuo è $a-b+c$. Quindi se dovrassi sottrarre da a la quantità negativa $-c$, si sottrarrà scrivendo $a+c$. Onde in generale si può stabilire, che per sottrarre da una quantità un polinomio qualunque, convien mutare a questo i segni, e poi sommarlo con la proposta quantità. Venghiamo agli esempj.

Esempio I.

Dalla quantità $3a+2bc-3mnx+d$ si debba sottrarne $2a-2bc-mnx+2d-q$. Mutati i segni della seconda quantità essa diventerà $-2a+2bc+mnx-2d+q$; adesso si sommi con la prima come segue:

$$\begin{array}{r} 3a+2bc-3mnx+d \\ -2a+2bc+mnx-2d+q \\ \hline a+4bc-2mnx-d+q \end{array}$$

Esempio II.

Dalla quantità $5a+3bc-4mx+q$

si debba insieme sottrarre le due quantità $3a-4bc-5cd-2q$, $a+7bc-4mx-2cd+2x$. Si faccia come segue.

$$\begin{array}{l}
5a+3bc-4mx+q \\
-3a+4bc \qquad\quad +2q+5cd \\
\underline{-a-7bc+4mx \qquad +2cd-2x} \\
a \qquad\qquad\qquad\quad +3q+7cd-2x
\end{array}$$

7. Passiamo alla moltiplicazione delle quantità complesse: e in primo luogo se si dovrà moltiplicare la quantità $a+b$ per c, è chiaro che il prodotto sarà $ac+bc$. In fatti, segue dalla natura della moltiplicazione, che dovendo moltiplicare due numeri fra loro, e lo stesso moltiplicare, il primo per il secondo, che spezzare uno di questi in due parti, e moltiplicare separatamente ciascuna parte per l'altro. Così il 15 moltiplicato per 7, dà per prodotto 105, e $6+9$ moltiplicato per 7 dà $42+63=105$.

Ma dovendosi moltiplicare per c la quantità $a-b$ il prodotto sarà $ac-bc$. Poichè se moltiplico la quantità a per c scrivendo ac ho moltiplicato c per una

quantità maggiore del giusto, giacchè non la devo moltiplicare per a ma per $a-b$, e il di più è il prodotto di b per c; convien perciò che sottragga questo prodotto di b per c, e quindi il vero prodotto sarà $ac-bc$. In altra maniera si può dimostrare, che una quantità positiva c moltiplicata per una quantità negativa $-b$ dà un prodotto negativo. Si debba moltiplicare $b-b$ per c; siccome $b-b=0$, anche il prodotto sarà zero: acciò questo succeda, conviene che $b-b$ moltiplicato per c ci dia $bc-bc$, cioè che il prodotto di c per $-b$ sia negativo.

Se poi una quantità negativa si moltiplicherà per una negativa, il prodotto sarà positivo. In fatti $a-a$, o sia zero moltiplicato per $-b$, il prodotto dev' essere zero necessariamente: ora siccome $a\times-b=-ab$, perciò che si è dimostrato, conviene dunque che sia $-a\times-b=ab$, perchè il prodotto divenga $-ab+ab$; altrimenti questo prodotto non sarebbe zero. Ne segue che dovendosi moltiplicare una quantità positiva per un altra positiva, il prodotto sarà positivo; e che doven-

dosi moltiplicare una quantità positiva per una negativa, il prodotto sarà negativo; in fine dovendosi moltiplicare una quantità negativa per una negativa il prodotto sarà positivo. Sarebbe inintelligibile, il dire che più per più fà più, che più per meno fà meno, e che meno per meno fà più; mentre non i segni, ma bensì le quantità si moltiplicano fra loro.

Dopo queste riflessioni su' segni, la moltiplicazione delle quantità complesse non ha più alcuna difficoltà. Si debbano per esempio moltiplicare le quantità $a-b$, $c-d$: incomincio dal moltiplicare $a-b$ per c ed ho $bc-ac$; poi moltiplico la medesima $a-b$ per $-d$, e ne risulta $-ad+bd$; quindi il cercato prodotto sarà $ac-bc-ad+bd$. Aggiungerò per esercizio alcuni esempj.

Esempio I.

Si debbano moltiplicare tra loro le quantità $2a+5b-3c$, $a-3b+2c$. Si faccia la moltiplicazione come segue:

$$\begin{array}{llllll}
2a & +5b & -3c & & & \\
a & -3b & +2c & & & \\
\hline
2aa & +5ab & -3ac & & & \\
 & -6ab & & -15bb & +9bc & \\
 & & +4ac & & +10bc & -6cc \\
\hline
2aa & -ab & +ac & -15bb & +19bc & -6cc
\end{array}$$

In primo luogo moltiplico per a tutti i termini $2a + 5b - 3c$, e scrivo il prodotto $2aa + 5ab - 3ac$. La medesima quantità moltiplico per $-3b$, e scrivo il prodotto $-6ab - 15bb + 9bc$ come sopra ponendo ciascun termine sotto il suo simile. Finalmente moltiplico per $2c$, e scritto il prodotto $4ac + 10bc - 6cc$ come sopra, prendo la somma di questi parziali prodotti, ed ho il prodotto cercato $2aa - ab + ac - 15bb + 19bc - 6cc$.

Esempio II.

$$\begin{array}{llllll}
2a & +3b & +4x & & & \\
3a & -2b & -6x & & & \\
\hline
6aa & +9ab & +12ax & & & \\
 & -4ab & & -6bb & -8bx & \\
 & & -12ax & & -18bx & -24xx \\
\hline
6aa & +5ab & & -6bb & -26bx & -24xx
\end{array}$$

Esempio III.

$$
\begin{array}{l}
aa + bb + cc + dd \\
ae + bf - cg - dh \\
\hline
aaae + abbe + acce + adde + aabf \\
+ bbbf + bccf + bddf - aacg - bbcg - cccg \\
- cddg - aadh - bbdh - ccdh - dddh \\
\hline
\end{array}
$$

In quest' esempio non si può fare alcuna riduzione, per non esservi nel prodotto quantità simili.

La moltiplicazione delle quantità complesse alcune volte non si eseguisce, ma si accenna soltanto; ciò suol farsi in varie maniere. Se le quantità $2a + 3b - c$, $4a - 5b$ si troveranno scritte ne' seguenti modi, $(2a + 3b - c)\ (4a - 5b)$, $(2a + 3b - c)\ (4a - 5b)$, $(2a + 3b - c) \times (4a - 5b)$, $\overline{2a + 3b - c} \,.\, \overline{4a - 5b}$, $\overline{2a + 3b - c} \times \overline{4a - 5b}$, si dovrà intendere che queste quantità devono tra loro moltiplicarsi.

8. Venghiamo alla divisione delle quantità complesse, e in primo luogo osserviamo che per riguardo ai segni regnano nella divisione le medesime regole che nella moltiplicazione: cioè una quantità positiva divisa per una quantità positiva dà un quoziente posi-

tivo; che una quantità negativa o positiva divisa per una quantità positiva o negativa, dà un quoziente negativo, e che una quantità negativa divisa per una negativa il quoziente è positivo. La ragione di ciò chiaramente apparisce, riflettendo alla relazione che hanno tra loro le due operazioni di moltiplicazione e divisione; mentre l' una distrugge quello che ha fatto l' altra, e perciò in ogni divisione il quoziente moltiplicato pel divisore deve restituire il dividendo. Posto questo, la quantità negativa $-ab$ divisa per la positiva a darà il quoziente negativo $-b$, perchè questo quoziente moltiplicato per a deve restituire il dividendo negativo $-ab$. Così pure ab divisa per $-a$ ci darà per quoziente $-b$, perchè $-b\times-a=ab$; e $-ab$ divisa per $-a$ avrà per quoziente b, perchè $b\times-a=-ab$. Adunque per riguardo ai segni le medesime regole hanno luogo nella moltiplicazione e nella divisione, cioè segni simili danno risultamenti positivi, segni contrarj risultamenti negativi.

Passiamo dunque alla divisione delle quantità complesse, e sia proposto di

dividere la quantità $aa + 2ab + bb$ per $a + b$. La questione si riduce a trovare una quantità tale, che moltiplicata per $a + b$ ci dia per prodotto $aa + 2ab + bb$: nell' esempio seguente s' insegna il modo di trovare questa quantità.

ESEMPIO I.

Divisore	Dividendo	Quoziente
$a+b$)	$aa+2ab+bb$	($a+b$
	$aa+ab$	
	$ab+bb$	
	$ab+bb$	
	0	

Primieramente si scriva alla sinistra del dividendo il divisore $a+b$; poi si divida il primo termine aa del dividendo pel primo termine a del divisore, e il quoziente a si scriva alla destra del dividendo. Questo quoziente a adesso si moltiplichi pel divisore, ed il prodotto $aa + ab$ si sottragga dal dividendo, e si avrà per residuo $ab+bb$. Di nuovo il primo termine ab del residuo si divida pel primo termine a del divisore, ed il quoziente b si scriva come sopra; questo quoziente b si mol-

tiplichi pel divisore, ed il prodotto $ab + bb$ si sottragga dal residuo, e siccome rimane zero, l'operazione è terminata, ed il quoziente cercato è $a + b$; perchè, come abbiamo veduto nell' operazione, questa quantità $a + b$ moltiplicata nel divisore diventa eguale al dividendo. In questo modo deve sempre procedere l'operazione, finchè non giunga ad un residuo $= 0$. Acciò per altro essa riesca più facilmente, conviene ordinare il dividendo ed il divisore per la medesima lettera, cioè disporli in modo, che il primo termine contenga quella lettera il più delle volte, e gli altri gradatamente meno la contengono. Così nell' esempio precedente il dividendo era ordinato per la lettera a, perchè il primo termine conteneva a due volte, il secondo una, il terzo nessuna.

Esempio II.

Si debba dividere $aa - bb$ per $a + b$

$$
\begin{array}{rl}
a + b) & aa - bb \; (a - b \\
& \underline{aa + ab} \\
& \quad -ab - bb \\
& \quad \underline{-ab - bb} \\
& \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Esempio III.

Sia proposto di dividere $10ab + 14ac + 4aa + 17bc + 6bb + 12cc$ per $3b + 2a + 4c$. Ordino prima queste quantità per la lettera a, con che esse diventano $4aa + 10ab + 14ac + 17bc + 6bb + 12cc$, $2a + 3b + 4c$; poi faccio la divisione, come segue

$$
\begin{array}{l}
2a+3b+4c)\,4aa+10ab+14ac+17bc+6bb+12cc\,(2a+2b+3c \\
\qquad\qquad\quad \underline{4aa+6ab+8ac} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 4ab+6ac+17bc+6bb+12cc \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{4ab\qquad\quad +8bc+6bb} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6ac+9bc+12cc \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{6ac+9bc+12cc} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Alcune volte succede, che una quantità non si può dividere esattamente per un' altra: così la quantità $aa + bb$ non si può dividere per $a + b$, poichè se facciamo l' operazione come segue

$$
\begin{array}{l}
a+b)\,aa+bb\,(a-b \\
\qquad\ \ \underline{aa+ab} \\
\qquad\qquad -ab+bb \\
\qquad\qquad \underline{-ab-bb} \\
\qquad\qquad\qquad 2bb
\end{array}
$$

giungeremo al residuo $2bb$, il quale non si può più dividere per a. In questi casi la divisione soltanto si accenna in questa guisa $\frac{aa+bb}{a+b}$; la qual quantità, siccome ogni altra simile, in cui il dividendo non può esattamente dividersi pel divisore, si chiama *frazione*, e il dividendo *numeratore*, il divisore *denominatore* della frazione, amendue poi considerati insieme si chiamano i *termini* della frazione. La divisione si accenna anche ne' modi seguenti $(aa+bb):(a+b)$, o pure $\overline{aa+bb}:\overline{a+b}$, i quali equivalgono all' altro $\frac{aa+bb}{a+b}$, cioè esprimono la divisione di $aa+bb$ per $a+b$.

CAPITOLO II.

Delle frazioni Algebraiche.

9. Abbiamo veduto che quando la divisione non può succedere esattamente, essa si accenna, e le quantità che

ne nascono, si chiamano *frazioni*. Quelle medesime operazioni si fanno sulle frazioni, che sull' altre quantità, cioè la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione. Ma prima di trattar di queste, fa d' uopo osservare alcune proprietà delle frazioni.

10. *Ridurre una quantità intera in una frazione che abbia un dato denominatore?*

Sia la quantità a che trattasi di ridurre in una frazione che abbia il denominatore b. Moltiplico a per b, e pongo sotto il prodotto ab il denominatore b; cosicchè a è la stessa cosa di $\frac{ab}{b}$.

11. Si vede similmente che ogni frazione può essere trasformata in un' altra dello stesso valore, con moltiplicare o dividere il suo numeratore ed il suo denominatore per una medesima quantità. Così la frazione $\frac{a}{b}$ diventa (moltiplicando sotto e sopra per c) $\frac{ac}{bc}$; la

frazione $\frac{aa+ab}{aa-bb}$ diventa (dividendo sotto e sopra per $a+b$) $\frac{a}{a-b}$.

12. *Ridurre in una sola frazione una quantità composta d' un intero e d' una frazione?*

Moltiplicate l'intero pel denominatore della frazione, e ponete questo denominatore sotto il prodotto che ne risulta unitamente al numeratore della frazione che si aveva. Così $a+\frac{bd}{c}$ diventa $\frac{ac+bd}{c}$; $a+\frac{ac-cd-ad}{c+d}$ diventa $\frac{ac+ad+ac-cd-ad}{c+d}$, ovvero $\frac{2ac-cd}{c+d}$, fatta la riduzione del numeratore.

13. *Togliere gl' interi che possono esservi in una frazione?*

Dividete il numeratore pel denominatore, quanto vi sarà possibile. Così,

avendo la frazione $\frac{aa+ab-cd}{a}$, divido per a i primi due termini del numeratore, e la riduco con questo mezzo alla quantità $a+b-\frac{cd}{a}$. Parimente la frazione $\frac{aa-2ab+bb+cc}{a-b}$ diventa $a-b+\frac{cc}{a-b}$, dividendo i tre primi termini del numeratore per $a-b$.

14 *Ridurre più frazioni al medesimo denominatore.*

Moltiplicate il numeratore di ciascuna di esse pel prodotto de' denominatori di tutte le altre, e ponete sotto a ciascun nuovo numeratore il prodotto di tutti i denominatori. Così le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, si cambiano rispettivamente in queste $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$ che hanno il medesimo denominatore.

L' operazione si farebbe nella stessa maniera, se il numeratore o il denominatore, o amendue, fossero quantità complesse. Così le due frazioni $\frac{a-b}{b+c}$, $\frac{g+h}{f+e}$ diventano, $\frac{(a-b)\times(f+e)}{(b+c)\times(f+e)}$ $\frac{(g+h)\times(b+c)}{(b+c)\times(f+e)}$ ovvero (effettuando le moltipliche) $\frac{af-bf+ae-bc}{bf+cf+be+ce}$, $\frac{bg+bh+cg+ch}{bf+cf+be+ce}$.

15. Quando le frazioni hanno de' fattori comuni nei denominatori, possono queste ridursi alla medesima denominazione in una maniera compendiosa, che è utile nella pratica del calcolo. Siano per esempio le due frazioni $\frac{aaa}{bc}$, $\frac{dfg}{bh}$, i cui denominatori hanno il fattore comune b: io vedo che moltiplicando la prima sotto e sopra,

pel fattore non comune h del denominatore della seconda; e la seconda moltiplicata similmente pel fattore non comune a del denominatore della prima, le ridurrò tutte di seguito al medesimo denominatore. Esse diverranno così $\frac{aah}{bch}$, $\frac{cdfg}{bch}$.

16. *Aggiungere delle frazioni ad altre quantità intere o rotte?*

Scrivete tutte le quantità da aggiungersi le une di seguito alle altre, coi segni che hanno, e fate le riduzioni di cui può essere suscettibile la somma. Siano da aggiungersi insieme la quantità intera $a-b$, e la frazione $\frac{bb}{a+b}$: scrivo $a-b+\frac{bb}{a+b}$; e riducendo l'intero in una frazione che abbia il denominatore $a+b$, ho $\frac{aa-bb+bb}{a+b}$, cioè $\frac{aa}{a+b}$. Per sommare le tre frazioni

$+\frac{a}{b}$, $-\frac{c}{d}$, $+\frac{e}{f}$, scrivo $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$. Se si riducono queste tre frazioni al medesimo denominatore, si avrà $\frac{adf}{bdf}-\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}$, ovvero $\frac{adf-bcf+bde}{bdf}$.

17. *Fare la sottrazione delle quantità in cui vi sono delle frazioni?*

Cambiate i segni della quantità che dovete sottrarre, e così scrivetela di seguito a quella da cui deve essere sottratta. Così, per sottrarre $\frac{bb}{a+b}$ da $a-b$, scrivasi $a-b-\frac{bb}{a+b}$, e riducendo tutto in frazione, trovo $\frac{aa-bb-bb}{a+b}$, ovvero $\frac{aa-2bb}{a+b}$. Per sottrarre $-a$ da $\frac{aa}{a-b}$, scrivo $\frac{aa}{a-b}+a$, ovvero

$\frac{aa+aa-ab}{a-b}$, o sia $\frac{2aa-ab}{a-b}$. Per sottrarre la frazione $-\frac{c}{d}$ dalla frazione $\frac{a}{b}$ scrivo $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, e riducendo le due frazioni al medesimo denominatore, si avrà $\frac{ad+bc}{bd}$ per risultamento della sottrazione.

18. *Moltiplicare insieme un intero ed una frazione, o una frazione per una frazione?*

1.° Sia da moltiplicarsi l'intero $-3a$ per la frazione $\frac{m}{n}$, ovvero la frazione $\frac{m}{n}$ per l'intero $-3a$: moltiplico insieme l'intero ed il numeratore della frazione, e pongo il denominatore sotto il prodotto; il che dà $-\frac{3am}{n}$.

2.° Siano da moltiplicarsi insieme le due frazioni $-\frac{5a}{b}$ e $\frac{4f}{c}$; moltiplico numeratore per numeratore e denominatore per denominatore; il che dà $-\frac{20af}{bc}$ pel prodotto cercato.

19. *Dividere una frazione per un intero, o un intero per una frazione, o una frazione per una frazione.*

1.° Sia la frazione $\frac{m}{n}$ da dividersi per l'intero $-3a$; conservo il numeratore della frazione, e moltiplico il denominatore per $-3a$; il che dà $\frac{m}{-3an}$, o sia $-\frac{m}{3an}$ pel quoto cercato.

2.° Sia da dividersi l'intero $-3a$ per la frazione $\frac{m}{n}$: rovescio la frazione divisore, ed allora si tratta di moltipli-

care $-3a$ per $\frac{n}{m}$; il che dà $-\frac{3an}{m}$ pel quoto cercato.

3.° Nella stessa maniera, per dividere la frazione $\frac{p}{q}$ per $\frac{m}{n}$ bisogna rovesciare la frazione divisore, e moltiplicare insieme le due frazioni $\frac{p}{q}$, $\frac{n}{m}$: il quoto cercato è dunque $\frac{np}{mq}$.

20. *Ridurre una frazione a' suoi minimi termini?*

Dopo avere ordinati i due termini della frazione, per rapporto ad una stessa lettera, bisogna dividere quello de' due termini in cui questa lettera è ripetuta un maggior numero di volte, per il secondo, e seguitare l'operazione finchè è possibile, conforme alle regole ordinarie della divisione: in seguito bisogna dividere, secondo le medesime condizioni, il secondo termine pel primo residuo, poi il primo resi-

duo pel secondo, e così di seguito, finchè si giunga ad una divisione esatta; allora l'ultimo divisore è il *massimo comun divisore* de' due termini della frazione proposta. Se non si potesse pervenire a fare una divisione esatta, la frazione sarebbe irreducibile.

21. Non si cambia nulla al comun divisore di due quantità, col moltiplicare o dividere una di queste quantità per un fattore che non sia divisore dell'altra.

Sia per esempio la frazione $\frac{ab}{ac}$, i cui due termini hanno a per divisore comune; moltiplicando il numeratore o il denominatore per una quantità d, si formerà la nuova frazione $\frac{abd}{ac}$, ovvero $\frac{ab}{acd}$, i cui due termini non hanno altro divisor comune che a Ma se la quantità colla quale si moltiplica uno de' termini della frazione, fosse divisore dell' altro termine, allora si cambierebbe il divisore comune. Si moltiplichi per esempio, il numeratore della frazione $\frac{ab}{ac}$

per c, che è divisore del denominatore; si formerà la frazione $\frac{abc}{ac}$, i cui due termini hanno per divisor comune ac, e non a, come prima. Nella stessa maniera, se si moltiplica il denominatore della frazione $\frac{ab}{ac}$ per b, che è divisore del numeratore, si formerà la frazione $\frac{ab}{abc}$, i cui due termini hanno per divisore comune ab, e non a semplicemente. Dunque non si conserva il medesimo divisore comune ai due termini d'una frazione, se non col moltiplicare o dividere uno di questi termini per una quantità, che non sia divisore dell'altro.

Esempio I.

Si debba trovare il massimo comun divisore delle quantità $3aaa - 4aab - 9abb - 18bbb$, $5aa - 18ab + 9bb$. La prima quantità si deve dividere per

la seconda, ma poichè $3aaa$ non si può dividere per $5aa$, moltiplichiamo la prima per 5 che non è fattore della seconda. Fatta questa moltiplicazione la prima quantità diventa $15aaa - 20aab - 45abb - 90bbb$, la quale divisa per la seconda ci dà $3a$ per quoziente, e $34aab - 72abb - 90bbb$, o sia (tolto da questa il fattore $2b$ che non è nella prima) $17aa - 36ab - 45bb$ di residuo. Acciò la divisione riesca, si moltiplichi la prima quantità per 17, il qual numero non divide la seconda, ed avremo $85aa - 306ab + 153bb$, la quale divisa per $17aa - 36ab - 45bb$ dà il quoziente cinque, ed il residuo $-126ab + 378bb$ Siccome nè $-b$ nè 126 son fattori del precedente divisore, dividiamo questo residuo per $-126b$, e diventerà $a - 3b$. Dividiamo $17aa - 36ab - 45bb$ per $a - 3b$, e siccome la divisione si fa esattamente, il massimo comun divisore cercato sarà $a - 3b$. Ecco tutto il calcolo

$3aa - 18ab + 9bb$) $15aaa - 20aab - 45abb - 90bbb$ ($3a$

17 $\qquad 15aaa - 54aab + 27abb$

$2b$) $34aab - 72abb - 90bbb$

5)$85aa - 306ab + 153bb$ $\quad$ ($17aa - 36ab$ --$45bb$

$85aa - 180ab - 225bb$

$-126b$)$-126ab + 378bb$

$a - 36$) $17aa - 36ab - 45bb$ ($17a + 15b$

$17aa - 51ab$

$15ab - 45bb$

$15ab - 45bb$

0

Esempio II.

Sia proposto di trovare il massimo comun divisore delle due quantità $aaa - aab + abb - bbb$, $4aaaa - 2aabb - 4aaab + 2abbb$.

Siccome $2a$ divide tutti i termini del dividendo, e non divide quelli del divisore, comincio a liberare il dividendo da questo divisore, per semplificare l' operazione. Mi viene in tal guisa $2aaa - 2aab - abb + bbb$, da dividersi per $aaa - aab + abb - bbb$. Il quoto è 2, ed il residuo $-3abb + 3bbb$. Prendo per dividendo il divisore $aaa - aab + abb - bbb$, e per di-

visore il primo residuo $-3abb+3bbb$. E siccome $3bb$ è divisore di questo residuo, senza esserlo del nuovo dividendo, libero il divisore attuale dal fattore $3bb$. Con questo mezzo ho $aaa-aab+abb-bbb$ da dividere per $-a+b$. Viene per quoto esatto $-aa-bb$. Laonde concludo che $-a+b$ è il massimo comun divisore cercato.

Delle frazioni continue.

22. Nell' aritmetica si è veduta la natura delle frazioni continue; qui le considereremo sotto un aspetto più generale, siccome richiede la natura dell' algebra. Quando una frazione ha per denominatore la somma d'un intero e d' una frazione; e questa seconda frazione abbia per denominatore la somma d'un intero e di una frazione; e così di seguito, l' espressione composta di tutte queste frazioni particolari è ciò che chiamasi una *frazione continua*. Così l' espressione

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\text{ec.}}}}}$$

è una frazione continua.

23 Se ciascuno dei numeratori α, β, γ, δ ec., è eguale ad 1, l'espressione precedente diventerà

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{ec.}}}}}$$

Le frazioni continue che noi abbiamo considerate nell' aritmetica, hanno quest' ultima forma.

24. Qualunque frazione continua può ridursi in una frazione ordinaria. Sia per esempio, la frazione continua

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d}}}}$$

1.° La somma delle due ultime frazioni integranti $\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d}}$, essendo una fra-

zione che ha γ per numeratore, e $c + \frac{\delta}{d}$ per denominatore, è chiaro che ridotto questo denominatore nella frazione equivalente $\frac{cd + \delta}{d}$, la somma in questione potrà riguardarsi come una frazione che ha γ per numeratore, e $\frac{cd + \delta}{d}$ per denominatore, o ciò che è lo stesso, come il quoziente della quantità γ divisa per la frazione $\frac{cd + \delta}{d}$, e che sarà $\frac{\gamma d}{cd + \delta}$.

2.° Al posto delle ultime tre frazioni, possiamo sostituire $\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma d}{cd + \delta}$; donde si ricaverà, operando come sopra, la frazione ordinaria $\frac{\beta cd + \beta \delta}{bcd + b\delta + d\gamma}$.

3.° Similmente in vece della somma delle quattro frazioni integranti, possiamo prendere $\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha cd + \beta\delta}{bcd + b\delta + d\gamma}$, e ricaveremo la frazione ordinaria cercata $\frac{\alpha bcd + \alpha\delta b + \alpha\gamma d}{abcd + ab\delta + ad\gamma + \beta cd + \beta\delta}$.

25. Chiamando A il valore della frazione continua

$$\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \text{ec.}}}}$$

apparisce che andando da sinistra alla destra, se si prende la prima frazione integrante sola, poscia le due prime frazioni, indi le tre prime, e così di seguito, si avranno delle quantità alternativamente più grandi e più piccole di A; cioè sarà

$$A < \frac{\alpha}{a},\ A > \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b}},\ A < \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c}}},$$

ec. (a)

(a) I segni $<$, e $>$ significano minore e maggiore,

Perchè nella prima espressione $\frac{\alpha}{a}$ il denominatore a è più piccolo del vero denominatore, poichè quest'. ultimo è composto della somma di a con tutte le frazioni che seguono a destra. Così si ha $A < \frac{\alpha}{a}$. Nella seconda espressione $\frac{\alpha}{a + \frac{\beta}{b}}$, il denominatore b essendo evidentemente piccolissimo, la frazione $\frac{\beta}{b}$ è molto grande, e perciò la somma $a + \frac{\beta}{b}$ è grandissima; dunque la nostra espres-

---

così essendo A minore della frazione $\frac{\alpha}{a}$ si scrive $A < \frac{\alpha}{a}$; e vice versa se A fosse maggiore, bisognerebbe che fosse scritto $A > \frac{\alpha}{a}$. In generale è maggiore quella quantità verso cui l'apertura del segno è voltata, e minore quella contro cui sta la punta.

sione che ha per numeratore α, e per denominatore l' unione di cui abbiamo detto è piccolissima, poichè si diminuisce il valore d' una frazione, quando si aumenta il suo denominatore. Ragionando sempre in questo modo per le altre espressioni, si riconoscerà la verità della proposizione generale che si è asserita.

26. Risulta da ciò, che riducendo ciascuna delle sopra notate espressioni in frazioni ordinarie, si avrà

$$A < \frac{\alpha}{a}$$

$$A > \frac{\alpha b}{ab + \beta}$$

$$A < \frac{\alpha bc + \alpha\gamma}{abc + a\gamma + \beta c}$$

$$A > \frac{\alpha bcd + \alpha b\delta + \alpha\gamma d}{abcd + ab\delta + a\gamma d + \beta cd + \beta\delta}$$

così di seguito alternativamente.

27. Le frazioni che nascono prendendo un certo numero di frazioni componenti la frazion continua, hanno la

proprietà d' essere irreducibili, e di dare il valore della frazione principale in una maniera più prossima, che non la darebbe una frazione espressa per dei numeri più piccoli. Facilmente si vedrà la ragione, considerando che si mettono in opera dell' operazioni simili per trovar il massimo comun divisore di due numeri, e per isviluppare una frazione ordinaria in frazion continua. Facciamo vedere in generale la corrispondenza di queste operazioni.

28. Si tratta di ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{A}{B}$, nella quale A, B sono numeri dati. Sia $B > A$, e supponendo che diviso B per A, sia a il quoziente, e α il resto; dividendo A per α, sia b il quoziente, e β il resto; dividendo α per β, sia c il quoziente, e γ il resto, e così di seguito. È chiaro che la frazione proposta potrà subire le trasformazioni seguenti (mettendo successivamente per ciascun dividendo il prodotto del divisore per il quoziente, e aggiungendo il resto della divisione):

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{aA+\alpha}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\alpha b+\beta}{a(\alpha b+\beta)+\alpha}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{b(\beta c+\gamma)+\beta}{a(b\beta c+b\gamma+\beta)+\beta c+\gamma}$$

ec.

29. Quest' espressioni mostrano in generale il metodo che si tiene nella decomposizione di due numeri A e B per giungere a trovare il massimo comun divisore. Si vede che se, per esempio, nell' ultima di quest' espressioni, l' ultimo resto δ divide il resto precedente γ, la frazione $\frac{A}{B}$ sarà riducibile, e δ sarà il massimo comun divisore delle due quantità A e B.

30. Si debba ora sviluppare in frazion continua la frazione ordinaria $\frac{A}{B}$.

Prima di fare questo sviluppo, faremo presente quello che si disse nell' aritmetica, cioè *se dividasi il più gran ter-*

mine d' una frazione per il minore, ed il minore dividasi per il residuo, questo primo residuo per il secondo residuo, il secondo residuo per il terzo, e così di seguito; si svilupperà la frazione ordinaria in una serie discendente che chiamasi frazione continua. Si divida frattanto per A i due termini della frazio-

ne, e si avrà $\frac{1}{\frac{B}{A}}$. Supponghiamo che

il quoziente di B diviso per A sia a, e che il residuo sia α; la frazione

diventerà $\frac{1}{a+\frac{\alpha}{A}}$. Dividendo per α i

due termini della frazione $\frac{\alpha}{A}$, si avrà

$\frac{A}{B}=\frac{1}{a+\frac{1}{\frac{A}{\alpha}}}$. Sia b il quoziente di A

diviso per α, e β il resto; sarà $\frac{A}{B}$

$= \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\beta}{\alpha}}}$. Continuando ad operare nel medesimo modo, si troverà

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{ec.}}}}}$$

31. Ora dico, 1.° che se si và da sinistra a destra, e si termina la frazione continua ad una qualunque delle frazioni integranti, il risultamento che si otterrà essendo convertito in frazione ordinaria, sarà una frazione irreducibile; di fatti fermandosi alla frazione integrante $\frac{1}{c}$, ed escluse le altre frazioni a destra, si avrà la frazion continua $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}}$ che essendo ridotta in frazione ordinaria, diventa

$\frac{bc+1}{abc+a+c}$. Ma quest' ultima frazione è irreducibile; perchè se essa fosse reducibile, si potrebbe dividere i suoi due termini per un numero maggiore dell' unità. Sia g questo numero, allora $\frac{bc+1}{g}$, e $\frac{abc+a}{g}$ o pure $\frac{a(bc+1)}{g}$ saranno interi. Di più $\frac{abc+a+c}{g}$ sarebbe un intero: dunque $\frac{c}{g}$ sarà un intero, come pure $\frac{bc}{g}$. Ora se i numeri $\frac{bc+1}{g}$, e $\frac{bc}{g}$ sono interi, sarà pure intero $\frac{1}{g}$, ciò che è assurdo, essendo $g > 1$.

2.° Dico che non si può approssima-

re di più al valore della frazione $\frac{A}{B}$, di quello che si faccia con la frazione $\frac{bc + 1}{abc + a + c}$, prendendo anche una frazione che sia espressa per dei numeri minori. Di fatti, chiamando per restringere $\frac{C}{D}$ la frazione $\frac{bc + 1}{abc + a + c}$, e considerando che le due frazioni $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ contengono l'una, e l'altra le frazioni integranti $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, qualunque frazione che si pretenderà avvicini di più al $\frac{A}{B}$ di quello che faccia $\frac{C}{D}$, conterrà necessariamente le stesse frazioni integranti, e di più qualch' altra frazione integrante che indicherò per

$\frac{1}{m}$. Dunque la frazione più prossima ad $\frac{A}{B}$, sarà

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{m}}}}$$ o pure

$$\frac{bcm+b+m}{abcm+ab+am+cm+1}$$. Ma quest' ultima frazione è irreducibile, perchè se fosse reducibile si potrebbero dividere i suoi termini per un medesimo numero maggiore di uno, e che chiamerò h. Allora $\frac{bcm+b+m}{h}$ e $\frac{a(bmc+b+m)}{h}$ saranno interi. Di più il numero $\frac{a(bcm+b+m)+cm+1}{h}$ sarà pure un intero. Dunque $\frac{cm+1}{h}$

sarà anche intero, come lo è $\frac{bcm+b}{h}$.

I numeri $\frac{bcm+b+m}{h}$, e $\frac{bcm+b}{h}$ essendo interi, $\frac{m}{h}$ sarà intero, come pure $\frac{cm}{h}$. Finalmente $\frac{cm+1}{h}$ e $\frac{cm}{h}$ essendo interi, $\frac{1}{h}$ sarebbe un intero; ciò che è impossibile, per essere $h > 1$.

Altronde la frazione

$$\frac{bcm+b+m}{abcm+ab+am+cm+1}$$ è espressa da numeri maggiori di quello che sia espressa la frazione $\frac{C}{D}$. Dunque non avvi frazione che essendo espressa da più piccoli termini di quelli della frazione $\frac{C}{D}$, avvicini di più la frazione

$\frac{A}{B}$, di quello che faccia la stessa frazione $\frac{C}{D}$.

CAPITOLO III.

Delle Potenze.

32. Si è veduto che a moltiplicata per a dà per prodotto aa; aa moltiplicata per a dà per prodotto aaa, e così di seguito. Queste quantità a, aa, aaa, $aaaa$, ec. si chiamano *potenze* o *potestà* della quantità a, in modo che la prima potenza di a è a, la seconda aa, la terza aaa, ec. e la potenza si dice più alta quando è espressa per un maggior numero, e tale dicesi essere il suo grado, quale è il numero che la esprime.

Recherebbe un grande incomodo l'esprimere una potenza molto alta nel modo che abbiamo usato finora, unendo cioè tante lettere, quante sono necessarie per denotare quella potenza.

Perciò gli Analisti hanno immaginata una espressione delle potenze molto più breve, ed hanno stabilito che per denotare una potenza qualunque di a si scrivesse solamente a con quel numero sovrapposto, che rappresenta il grado della potenza. Così la seconda potenza o il *quadrato* aa si scrive a^2, la terza o sia il *cubo* aaa si scrive a^3, la quarta potenza o il *quadrato-quadrato* a^4, la quinta a^5, la sesta a^6, e così in seguito. I numeri posti sopra le lettere si chiamano *esponenti*, e denotano il grado della potenza.

33. La somma e la sottrazione delle potenze si fa come per le altre quantità, ponendo fra le diverse potenze che si dovranno sommare o sottrarre li segni $+$, o $-$. Così dovendo ad $a^3 + a^2b + c^4$ aggiungere $2a^3 - 3a^2b$, si disporranno le diverse potenze con la stessa regola che si tenne nelle quantità semplici, e cioè

$$\begin{array}{l} \;\; a^3 + \;\; a^2b + c^4 \\ 2a^3 - 3a^2b \\ \hline 3a^3 - 2a^2b + c^4 \end{array}$$

e fatta la somma e riduzione, si tro-

verà che $3a^3 - 2a^2b + c^4$ esprime la somma cercata delle due proposte quantità.

Dovendo da $5a^4 - 7ab^3$ sottrarre la quantità $2a^4 - 2ab^3 + 3c^2$, si muteranno i segni alla quantità da sottrarre, e si disporrà come sopra, onde avere il residuo $3a^4 - 5ab^3 - 3c^2$.

34 La moltiplicazione delle potenze si fa prendendo la somma degli esponenti; così dovendosi moltiplicare a^2 per a^3, il prodotto sarà $a^{2+3} = a^5$. Di fatti $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$; dunque $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$. Generalmente per avere il prodotto di a^m per a^n bisognerà scrivere a prima m volte, poi n volte, cioè in tutto $m + n$ volte, che equivale ad a^{m+n}. Pertanto due potenze della medesima quantità moltiplicate insieme danno un prodotto eguale ad una potenza, l'esponente della quale è la somma degli esponenti delle potenze date. Così $(a + b)^m \cdot (a + b)^n = (a + b)^{m+n}$, $(a - b + c)^m \cdot (a - b + c)^n = (a - b + c)^{m+n}$.

35. Una potenza divisa per un'altra dà per quoziente una potenza, che ha per esponente la differenza degli esponenti dati. Così a^5 divisa per a^3 dà per quoziente $a^{5-3} = a^2$, perchè $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$, ed in generale $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, come pure $\frac{(a+b)^m}{(a+b)^n} = (a+b)^{m-n}$. Merita particolare attenzione il caso, in cui una potenza si divide per una più alta di lei: si debba per esempio dividere a^3 per a^4, e per la regola precedente il quoziente sarà $a^{3-4} = a^{-1}$, così pure $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$, $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$, ec. Ma qual è il valore di queste potenze coll' esponente negativo? Si osservi in primo luogo che una potenza coll' esponente zero cioè a^0 è sempre eguale all' uni-

tà, qualunque sia il valore di a, poichè $a^0 = a^{1-1} = \frac{a}{a}$; ma $\frac{a}{a}$ è sempre $= 1$; dunque $a^0 = 1$. Adesso si divida a^0 per a; sarà $\frac{a^0}{a} = \frac{1}{a} = a^{0-1}$ $= a^{-1}$, così pure $\frac{a^0}{a^2} = \frac{1}{a^2} = a^{0-2}$ $= a^{-2}$, $\frac{a^0}{a^3} = a^{0-3} = a^{-3}$, e generalmente $\frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$, cioè una potenza coll' esponente negativo equivale all' unità divisa per la medesima potestà coll' esponente positivo.

36. Ci si presenta adesso un nuovo problema, in cui si cerca ciò che far si debba per inalzare una quantità ad una data potenza. Primieramente se alla potenza m dovremo elevare la quantità semplice a, è chiaro che ciò otterremo scrivendo a^m. Similmente il prodotto di più lettere abc elevato alla

potenza m sarà $a^m b^m c^m$. Ma se una potenza qualunque, come a^3, si dovrà inalzare ad un' altra potenza, per esempio alla quarta, io dico che ciò si farà scrivendo $a^{3\times4} = a^{12}$. Poichè $a^3 = aaa$, ed aaa elevata alla quarta potenza, diventa $a^4 . a^4 . a^4$, o facendo le moltiplicazioni $a^{4+4+4} = a^{3\times4} = a^{12}$. Siccome il medesimo discorso ha luogo per qualunque altra potenza, è chiaro in generale che a^m inalzata alla potenza n è eguale ad a^{mn}, cioè ad una potenza, che ha per esponente il prodotto degli esponenti m ed n. Ne segue, che la quantità $a^3 b^2 c^4$ inalzata alla quinta potenza è $a^{15} b^{10} c^{20}$, e generalmente $a^m . b^n . c^p$ elevata alla potenza r è $= a^{mr} . b^{nr} . c^{pr}$. Così pure il binomio $a + b$ inalzato alla potenza m è $= (a + b)^m$, e di nuovo elevato alla potenza n diventa $(a + b)^{mn}$.

37. Siccome $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^2}{b^2} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^3}{b^3} \times \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4}$, ec., è chiaro

che avremo le potenze di una frazione, se a quelle inalzeremo tanto il numeratore, quanto il denominatore di essa, cioè sarà in generale $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

38. Abbiamo veduto, che le potestà nascono dalla moltiplicazione di una quantità in se stessa tante volte, quante n' esprime l' esponente diminuito dell' unità. Quindi avremo le potenze del binomio $a + b$, se lo moltiplicheremo più volte in se stesso. Sarà dunque la seconda potestà del binomio $a + b$; cioè
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$; la terza cioè $(a+b)^3 = (a+b)^2 (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, ec. Ma se il binomio $a+b$ si dovesse inalzare ad una potenza molto alta, sarebbe lunga cosa ed intrigata l'eseguire tante moltiplicazioni. Quindi, siccome spesso occorre di dovere elevare il binomio ad una data potenza, hanno procurato gli Analisti di trovare un metodo, per cui questo inalzamento ottener si potesse senza

l' incomodo di tante moltiplicazioni. Questo metodo ci sarà facile di rinvenire, se attentamente osserveremo l'ordine che regna ne' diversi termini delle potestà del binomio, le quali sono espresse nella tavola seguente.

Tavola delle potenze del binomio.

$a + b$

$a^2 + 2ab + b^2$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

ec.

la qual tavola si forma con la continua moltiplicazione di $a + b$ in se stesso.

39. Si vede da questa tavola, che in qualunque potestà del binomio il primo termine contiene a inalzata alla potenza corrispondente; così nella quinta potenza il primo termine è a^5, nella sesta è a^6, ec. Nel secondo termine vi è a inalzata alla data potenza diminuita di un' unità, e moltiplicata per b: nel terzo a inalzata ad una potenza minore

di due unità della data, e moltiplicata per b^2. E così in seguito li esponenti di a vanno continuamente diminuendo di una unità, e quelli di b crescendo di una unità, in modo che la somma degli esponenti di a e di b in ciascun termine sia eguale all' esponente della potestà data, finchè finalmente nell' ultimo termine svanisca l' esponente di a, e quello di b divenga eguale al grado della potestà. Di quì nasce un metodo facilissimo per trovare tutti i termini delle potestà del binomio. Si scrivano le potenze di a decrescenti di una unità, in modo che la massima sia eguale alla potenza data del binomio, e la minima $=o$. Sotto a queste si scrivano le potenze di b, ma in ordine inverso, talmentechè la massima potenza di a corrisponda alla minima di b, e viceversa. Si moltiplichi ciascuna quantità superiore per l' inferiore corrispondente, e si avranno i termini della potestà cercata. Per esempio si debba cercare la sesta potestà del binomio $a+b$: si scrivano le potenze di a e di b come segue

$$a^6,\ a^5,\ a^4,\ a^3,\ a^2,\ a^1,\ a^0$$
$$b^0,\ b^1,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ b^6$$

e moltiplicando ciscun termine superiore per l' inferiore avremo, a motivo di $a^0 = b^0 = 1$,

$$a^6,\ a^5 b,\ a^4 b^2,\ a^3 b^3,\ a^2 b^4,\ ab^5,\ b^6$$

i quali sono i termini della sesta potestà, come può riscontrarsi nella tavola. Si debbano adesso trovare i termini della decima potenza del medesimo binomio: si scrivano le potenze di a e di b come quì sotto

$$a^{10}, a^9, a^8, a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a,\ 1$$
$$1,\ b,\ b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7, b^8, b^9, b^{10}$$

e moltiplicandole tra loro avremo i termini cercati

$$a^{10}, a^9 b, a^8 b^2, a^7 b^3, a^6 b^4, a^5 b^5, a^4 b^6, a^3 b^7, a^2 b^8, ab^9, b^{10}$$

40. Generalmente se vorremo inalzare il binomio $a + b$ ad una potenza qualunque m, otterremo i termini di questa potenza scrivendo le podestà di a e di b come segue

$$a^m,\ a^{m-1},\ a^{m-2},\ a^{m-3},\ a^{m-4},\ \text{ec.}$$
$$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ \text{ec.}$$

le quali si devono continuare finchè l' esponente di a svanisca, o ciò che è lo stesso, finchè l' esponente di b divenga $= m$, poi moltiplicando ciascuna potenza superiore per l' inferiore corispondente, avremo

$$a^m, a^{m-1} b, a^{m-2} b^2, a^{m-3} b^3, a^{m-4} b^4, \text{ec.}$$

e saranno questi i termini cercati del binomio $a + b$ inalzato alla potenza m.

41. Ciascun termine delle potestà del binomio ha però avanti di se alcuni coefficienti numerici, per conoscere l' andamento de quali è necessario porre la tavola precedente sotto un' altra forma. Ma prima si osservi, che dopo il massimo coefficiente ritornano gli stessi coefficienti precedenti, ma con ordine inverso. Si renderà evidente che ciò dev' esser così, se si rifletta, che se avessimo preso il binomio $b + a$ in vece di $a + b$, avremmo ottenute le medesime potenze scritte con ordine inverso, in modo che l' ultimo termine diventerebbe il primo, il penultimo diventerebbe il secondo, ec. Ora i coefficienti di una potenza di $b + a$ sono gli stessi che quei di una eguale poten-

za di $a+b$, perchè questa si cangia in quella, sol che si muti a in b e b in a. Dunque in qualunque potenza del binomio $a+b$ l' ultimo termine ha il medesimo coefficiente che il primo, il penultimo l' istesso che il secondo, e così in seguito. Questa osservazione ci toglie la metà della fatica; poichè basta giungere nelle potestà pari fino al coefficiente medio, e nelle dispari fino al primo de' due medj, gli altri essendo i coefficienti già ritrovati presi inversamente.

Tavola II. delle potestà del binomio a+b

$$a+b$$

$$a^2+2ab+\frac{2.1}{2}b^2$$

$$a^3+3a^2b+\frac{3.2}{2}ab^2+\frac{3.2.1}{2.3}b^3$$

$$a^4+4a^3b+\frac{4.3}{2}a^2b^2+\frac{4.3.2}{2.3}ab^3+\frac{4.3.2.1}{2.3.4}b^4$$

ec.

42. Di quì apparisce, che in qualunque potestà il coefficiente del secondo termine è eguale all' esponente

della potenza; il coefficiente del terzo è eguale all' esponente della potenza moltiplicato nel medesimo esponente diminuito di una unità e diviso per 2; il coefficiente del quarto è eguale a quello del terzo moltiplicato nell'esponente diminuito di due e diviso per 3, e gli altri coefficienti seguitano la medesima legge, cioè dipendono uno dall' altro nel medesimo ordine. Quindi senza l'incomodo della moltiplicazione si potranno facilmente determinare tanto i termini, che i coefficienti di qualunque potenza del binomio $a+b$. Si debba per esempio ricercare la sesta potenza, e chiamando A, B, C, D, E, F i coefficienti dei termini, in modo che sia

$$(a+b)^6 = a^6 + Aa^5b + Ba^4b^2 + Ca^3b^3 + Da^2b^4 + Eab^5 + Fb^6,$$ avremo per le cose precedenti

$A = 6$

$$B = \frac{A \cdot 5}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$C = \frac{B \cdot 4}{3} = \frac{15 \cdot 4}{3} = 20$$

$$D = \frac{C \cdot 3}{4} = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15$$

$$E = \frac{D \cdot 2}{5} = \frac{15 \cdot 2}{5} = 6$$

$$F = \frac{E \cdot 1}{6} = \frac{6 \cdot 1}{6} = 1$$

Onde sarà $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

43. Si può anche da ciò dedurre quello che far convenga per avere una qualunque potestà indeterminata m del binomio $a + b$. Supponghiamo che A, B, C, D, E, ec. siano i coefficienti di questa potestà, e troveremo con la regola precedente

$$A = m$$

$$B = A\frac{(m-1)}{2} = m\frac{(m-1)}{2}$$

$$C = B\frac{(m-2)}{3} = m\frac{(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}$$

$$D = C\frac{(m-3)}{4} = m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}$$

$$E = D\frac{(m-4)}{5} = m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

ec.

ove manifesta si rende la legge che osservano questi coefficienti, i quali perciò si possono continuare quanto piace. Siccome adunque abbiamo supposto

$$(a+b)^m = a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + Da^{m-4}b^4 + \text{ec.}$$

avremo sostituendo i valori delle lettere A, B, C, ec.

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + m\frac{(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}a^{m-3}b^3 + \text{ec.}$$

in modo che il coefficiente di $a^{m-r}b^r$ sarà

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-r+1)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots r}$$

Questa elegantissima espressione si chiama la formola Newtoniana del binomio, poichè Newton n'è l'inventore.

44. Se in vece di $a+b$ si fosse dovuto inalzare alla potenza m il binomio $a-b$, allora la nostra espressione sarebbe stata

$$(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b + m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}b^2$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}a^{m-3}b^3 + \text{ec.}$$

Ciò è manifesto, mentre il secondo, quarto, sesto, ec. termine debbono essere negativi, essendo

$(-b)^1 = -b, (-b)^3 = -b^3, (-b)^5 = -b^5,$ ec.

45. L'uso della formola Newtoniana s'estende ancora alle potenze di un qualunque polinomio. Di fatti, se si dovrà inalzare alla potenza m il trinomio $a+b+c$, si farà $a+b=p$, e sarà

$$(p+c)^m = p^m + mp^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}c^2 + \text{ec.}$$

$p^m = (a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \text{ec.}$
$p^{m-1} = (a+b)^{m-1} = a^{m-1} + (m-1) a^{m-2} b + \text{ec.}$
$p^{m-2} = (a+b)^{m-2} = a^{m-2} + (m-2) a^{m-3} b + \text{ec.}$

Sostituendo questi valori nella espressione precedente avremo $(p+c)^m$, cioè $(a+b+c)^m$ espresso dalla formola

$$a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \text{ec.}$$

$$+ mc (a^{m-1} + (m-1) a^{m-2} b + \text{ec.}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2} c^2 (a^{m-2} + (m-2) a^{m-3} b + \text{ec.})$$

$$+ \text{ec.}$$

CAPITOLO IV.

Dei Radicali, e dell' estrazione della radice quadrata e cuba.

46. Quella quantità che moltiplicata più volte in se stessa produce una potenza, si chiama la di lei *radice*, e riceve il suo nome o il suo *esponente* dal numero delle volte accresciuto dell'

unità, nelle quali è moltiplicata in se stessa per produrre la potenza. Così se è moltiplicata una sola volta in se stessa, si chiama radice seconda o *quadrata*, se due volte radice terza o *cubica*, se tre volte, radice quarta, o *quadrato-quadrata*, se quattro volte, radice quinta, e così in seguito. È dunque a la radice quadrata di a^2, la cubica di a^3, la quarta di a^4, la quinta di a^5, ec. e così pure a^2 è la radice quadrata di a^4, la terza di a^6, la quarta di a^8, ec. Viceversa, della medesima potenza a^{12} la radice quadrata è a^6, la cubica a^4, la quarta a^3, la sesta a^2, la duodecima a. Generalmente di qualunque potestà a^m la radice quadrata è $a^{\frac{m}{2}}$, la cubica $a^{\frac{m}{3}}$, la quarta $a^{\frac{m}{4}}$, e in generale la radice dell' esponente n è $a^{\frac{m}{n}}$. Si avrà perciò qualunque radice di una data potestà, se l' esponente della potestà si dividerà per l' esponente della radice.

47. Di quì apparisce, che avremo la vera radice di una potestà, ogni qual-

volta il di lei esponente sarà divisibile per l'esponente della radice, poichè in tal caso $a^{\frac{m}{n}}$ sarà una potenza di a. Ma se m non si può dividere per n, allora non si potrà ottenere la radice; così la radice quadrata di a^5 non può aversi, perchè il 5 non si può dividere per 2. Nè ciò deve far meraviglia, purchè si rifletta che non vi è alcuna potenza di a, che moltiplicata in se stessa formi il prodotto a^5.

48. Ma quantunque queste radici sieno inassegnabili, pure siccome spesso s'incontrano, e sono di un grand' uso nell' Analisi, si considerano con tutta l'attenzione, e si dà ad esse il nome di radicali. I radicali adunque sono quelle potestà che hanno per esponente un numero rotto, come $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, $a^{\frac{7}{4}}$, ec. Ciò si deve intendere anche delle quantità complesse, come sarebbe $(a+b)^{\frac{1}{2}}$, che indica la radice quadrata di $a+b$, $(3a+3b)^{\frac{2}{3}}$,

che indica la radice cubica di $(3a+3b)^2$, e le altre simili.

49 Le quantità radicali si esprimono anche in un'altra maniera, ponendo cioè avanti ad esse il segno $\surd$, che rappresenta la radice. E per denotare le diverse specie di radici, nel segno $\surd$ si scrive l'esponente della radice in modo, che $\sqrt[3]{\ }$ indica la radice cubica, $\sqrt[4]{\ }$ la radice quarta, $\sqrt[5]{\ }$ la radice quinta, e così in seguito; quando poi il segno $\surd$ non ha alcun numero, s'intende sempre che rappresenti la radice quadrata. Sarà dunque $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{bc^2}=\overline{bc^2}^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{a^2bc^3}=\overline{a^2bc^3}^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}$. La prima operazione da farsi su' radicali, consiste nella loro riduzione alla più semplice espressione; da questa perciò cominceremo.

50. Essendo $\sqrt{ab^2} = ab^{2 \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b = b\sqrt{a}$, se qualche fattore della quantità sotto il segno radicale avrà per esponente l' esponente medesimo del radicale, si potrà fare uscir fuori del segno. Così essendo $\sqrt{48a^2bc} = \sqrt{4^2a^2 . 3bc}$, questo radicale si scriverà più semplicemente così $4a\sqrt{3bc}$. Così ancora $\sqrt[3]{(a^3b - a^3c)} = \sqrt[3]{a^3(b-c)} = a\sqrt[3]{(b-c)}$; similmente $\sqrt[4]{(a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6)} = \sqrt[4]{(a+b)^6} = \sqrt[4]{(a+b)^4(a+b)^2} = (a+b)\sqrt[4]{(a+b)^2} = (a+b)(a+b)^{\frac{2}{4}} = (a+b)\sqrt{(a+b)}$.

51. Per paragonare tra loro i radicali di diversa denominazione, convien ridurli al medesimo esponente. Dati i

due radicali $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[q]{b^p}$ si possono anche esprimer così, $a^{\frac{m}{n}}$, $b^{\frac{p}{q}}$; gli esponenti $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ ridotti al medesimo denominatore diventeranno $\frac{mq}{nq}$, $\frac{np}{nq}$, ed i radicali proposti saranno
$a^{\frac{mq}{nq}}$; $b^{\frac{np}{nq}}$, o sia $\sqrt[nq]{a^{mq}}$, $\sqrt[nq]{b^{np}}$, che adesso hanno il medesimo esponente. E siccome le frazioni ridotte al medesimo denominatore rimangono le stesse, si manterrà l'istesso valore agli esponenti fratti di ciascun radicale, e perciò ai radicali medesimi, allorchè son ridotti a comune denominatore.

Dati pertanto i due radicali $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[q]{b^p}$, i quali debbano ridursi al medesimo esponente, si moltiplicheranno tra loro i due esponenti n, q, ed il prodotto nq sarà l'esponente comune ai due radicali, e l'esponente m della quantità a^m sotto il segno del primo

radicale si moltiplicherà per l'esponente q del secondo radicale, e viceversa, per aver gli esponenti delle quantità sotto il segno.

52. Venghiamo adesso alle quattro principali operazioni su' radicali, e siccome per riguardo alla somma ed alla sottrazione non v' è alcuna particolarità da notarsi, mentre si fanno queste operazioni come per le altre quantità, ponendo rispettivamente i segni più e meno; così passeremo subito a parlare della moltiplicazione. Si debbano moltiplicare tra loro i due radicali dell' istesso esponente $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$; questi equivalgono ad $a^{\frac{1}{n}}$, $b^{\frac{1}{n}}$, le quali quantità moltiplicate ci danno il prodotto $a^{\frac{1}{n}}\ b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$, e rimettendo il segno radicale $\sqrt[n]{ab}$. Quindi si ha il prodotto de' radicali del medesimo nome lasciando intatto l' esponente, e moltiplicando le quantità poste sotto il segno. Per mostrare la moltiplicazione delle quantità radicali complesse daremo i seguenti esempj.

ESEMPIO I.

Si debbano moltiplicare tra loro le quantità seguenti

$$
\begin{array}{lll}
a + \sqrt{a} - \sqrt{(a+b)} & & \\
2a - \sqrt{a} + 2\sqrt{(a+b)} & & \\
\hline
2a^2 + 2a\sqrt{a} - 2a\sqrt{(a+b)} & & \\
\quad - a\sqrt{a} & - \sqrt{a^2} + \sqrt{a(a+b)} & \\
\qquad\quad + 2a\sqrt{(a+b)} & + 2\sqrt{a(a+b)} - 2\sqrt{(a+b)^2} & \\
\hline
2a^2 + a\sqrt{a} & - \sqrt{a^2} + 3\sqrt{a(a+b)} - 2\sqrt{(a+b)^2} &
\end{array}
$$

Questo è il prodotto cercato, il quale ridotti i radicali diventa $2a^2 + a\sqrt{a} - a + 3\sqrt{a}(a+b) - 2a - 2b$, o sia $2a^2 - 3a - 2b + a\sqrt{a} + 3\sqrt{a}(a+b)$.

ESEMPIO II.

Le quantità da moltiplicarsi siano $a + 2\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$, $4a - 3\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}$, le quali ridotti i radicali al medesimo esponente diventano $a + 2\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2}$, $4a - 3\sqrt[6]{a^3} + 2\sqrt[6]{b^2}$; adesso si faccia la moltiplicazione come segue.

$$\begin{array}{ll}
a+2\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{b^2} & \\
4a-3\sqrt[6]{a^3}+2\sqrt[6]{b^2} & \\
\hline
4a^2+8a\sqrt[6]{a^3}+4a\sqrt[6]{b^2} & \\
\quad -3a\sqrt[6]{a^3} & -6\sqrt[6]{a^6}-3\sqrt[6]{a^3b^2} \\
\quad\quad +2a\sqrt[6]{b^2} & +4\sqrt[6]{a^3b^2}+2\sqrt[6]{b^4} \\
\hline
4a^2+5a\sqrt[6]{a^3}+6a\sqrt[6]{b^2}-6\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{a^3b^2}+2\sqrt[6]{b^4} &
\end{array}$$

o sia $4a^2+5a\sqrt{a}+6a\sqrt[3]{b}-6a$ $+\sqrt[6]{a^3b^2}+2\sqrt[3]{b^2}$.

53. La divisione de' radicali del medesimo nome si fa come se le quantità non fossero sotto il segno radicale.

In fatti, essendo $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{b}=b^{\frac{1}{n}}$,

avremo $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. Per

la divisione de' radicali complessi si osservino i seguenti esempj.

Esempio I.

Si debba dividere la quantità $2a^2 - 2a + 12\sqrt{ab} - 18b$ per $a + \sqrt{a} - 3\sqrt{b}$.

$$a+\sqrt{a}-3\sqrt{b}\,\big(\,2a^2-2a+12\sqrt{ab}-18b\,\big(\,2a-2\sqrt{a}+6\sqrt{b}$$

$$2a^2+2a\sqrt{a}-6a\sqrt{b}$$

$$-2a\sqrt{a}-2a+6a\sqrt{b}+12\sqrt{ab}-18b$$

$$-2a\sqrt{a}-2a+6\sqrt{ab}$$

$$6a\sqrt{b}+6\sqrt{ab}-18b$$

$$6a\sqrt{b}+6\sqrt{ab}-18b$$

$$0$$

Esempio II.

La quantità $6a - \sqrt[6]{a^3b^2} - 12\sqrt[3]{b^2}$ debba dividersi per $2\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}$.

$$2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b}\,\big)\,6a-\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}\,\big(\,3\sqrt{a}+4\sqrt[3]{b}$$

$$6a-9\sqrt[6]{a^3b^2}$$

$$8\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}$$

$$8\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}$$

$$0$$

54. Facilmente si comprende, come debba farsi la moltiplicazione, e la divisione tra quei radicali, che si chiamano universali, ne' quali la quantità sotto il segno è un radicale complesso. Si riducano prima questi radicali al medesimo esponente, poi tolto il segno universale, cioè quello che comprende tutta la quantità, si faccia la moltiplicazione o la divisione come sopra, ed il prodotto o il quoziente si riponga sotto il segno.

55. Siccome $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, sarà $(\sqrt[n]{a})^p = a^{\frac{p}{n}}$, e restituito il segno radicale $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$; cioè per inalzare un radicale ad una data potenza, conviene a quella potenza elevare la quantità posta sotto il segno radicale.

56. Ma per estrarre una data radice da un radicale bisognerà moltiplicare per l'esponente della radice data l'esponente del radicale. In fatti essendo $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, e per estrarre la radice di una potestà dovendosi l'esponente del-

la potestà dividere per l'esponente della radice, sarà $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$. Quindi sarà $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$, $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$ $= \sqrt[6]{a}$, $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \sqrt[24]{a}$.

57. Alcune volte succede, che dalle quantità complesse si può esattamente estrarre la radice, in modo che svaniscono allora i segni radicali, e la quantità proposta prende una forma più semplice. Convien dunque mostrare il metodo da tenersi per estrarre queste radici, quando ciò e possibile. E per incominciare dalla radice quadrata, siccome la quantità $a^2 + 2ab + b^2$ è un quadrato, di cui la radice è $a + b$, è chiaro che otteremo questa radice, allorchè ci è incognita, se estraendo la radice dal primo termine a^2, la quale è a, pel doppio di essa o sia per $2a$ divideremo il secondo termine $2ab$, poichè il quoziente sarà b, cioè l'altro termine della radice. Di quì apparisce quel metodo che cercavamo, il quale schiariremo negli esempj seguenti.

Esempio I.

Estrarre la radice quadrata dal polinomio $4a^2 - 4ab + b^2$?

Ordino questo polinomio per rapporto alla lettera a, e lo dispongo come qui si vede:

Quadrato supposto.	radice:
$4a^2 - 4ab + b^2$	$2a - b$
$-4a^2$	$4a$
1.° residuo $-4ab + b^2$	
$+4ab - b^2$	
2.° residuo 0	

Ciò posto, 1.° la radice del primo termine $4a^2$ è $\pm 2a$. Mi contento, per semplificare l' operazione, di scrivere questa radice col segno superiore sottinteso. Quadro $2a$, e scrivo il quadrato con un segno contrario, sotto il primo termine della quantità proposta, per poter fare la riduzione. Fatta questa riduzione, rimane $-4ab + b^2$.

2.° Raddoppio la radice $2a$, il che mi dà $4a$, quantità colla quale divido

il primo termine $-4ab$ del residuo precedente; e viene il quoto $-b$, che scrivo di seguito al primo termine $2a$ della radice. Faccio il prodotto di $4a$ per $-b$, ed il quadrato di $-b$; scrivo la somma di questi due prodotti con segni contrarj sotto il primo residuo $-4ab+b^2$. Fatta la riduzione, non rimane nulla; onde concludo che $2a-b$ è la radice esatta del polinomio proposto.

Si vede che in vece di $2a-b$, si potrebbe prendere ugualmente per radice $-2a+b$, che ha segni contrarj a quelli della prima.

ESEMPIO II.

Estrarre la radice quadrata dal polinomio $9a^2-12ab-6ac+4bc+4b^2+c^2$, *che è ordinato per rapporto alla lettera a?*

Dispongo le quantità, ed opero sopra di esse come si trova qui espresso:

Quadrato supposto .	radice.
$9a^2 - 12ab + 4b^2 + 4bc + c^2$ $\quad\; - 6ac$	$3a - 2b - c$
$-9a^2$	$6a$
1.° residuo $-12ab + 4b^2 + 4bc + c^2$ $\quad\; - 6ac$	$6a - 4b$.
$+12ab - 4b^2$	
2.° residuo $- 6ac + 4bc + c^2$	
$+ 6ac - 4bc - c^2$	
3.° residuo 0	

1.° Levo la radice dal primo termine $9a^2$, essa è $\pm 3a$; ma non prendo che il segno superiore. Scrivo il quadrato di questa radice, con segno contrario, sotto il polinomio proposto. Fatta la riduzione, si ha per primo residuo $-12ab - 6ac + 4b^2 + 4bc + c^2$.

2.° Raddoppio la radice trovata $3a$, e con questo doppio $6a$ divido il primo termine $-12ab$ del residuo precedente; il quoto è $-2b$, che scrivo al seguito di $3a$. Faccio il prodotto di $6a$ per $-2b$, ed il quadrato di $-2b$: scrivo la somma di questi due prodotti, con segni contrarj, sotto il primo residuo. Fatta la riduzione, si ha il

secondo residuo $-6ac+4bc+c^2$.

3.° Raddoppio la radice $3a-2b$, il che dà $6a-4b$. Col primo termine $6a$ di questa quantità divido il primo termine $-6ac$ del secondo residuo, e viene il quoto $-c$, che scrivo al seguito di $3a-2b$. Moltiplico il divisore $6a-4b$ per $-c$, e fo il quadrato di $-c$; scrivo la somma di questi due prodotti con segni contrarj sotto il secondo residuo. Faccio la riduzione, e non rimane nulla. Dunque $3a-2b-c$, ovvero $-(3a-2b-c)$ è la radice esatta del polinomio proposto.

58. Artificj simili servono per l'estrazione della radice cubica, come gli esempj che seguono faranno vedere.

Esempio I.

Estrarre la radice cubica dal polinomio $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$?

Comincio dall'ordinare questa quantità relativamente alla lettera a; in seguito fo l'operazione richiesta, come è indicato nella seguente tabella, e come la spiego nel discorso che accompagna questa tabella.

Cubo suposto .	radice cubica
$27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$	$3a - 2b$
$-72a^3$	
1.° residuo $-54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$	$27a^2$
$+54a^2b - 36ab^2 + 8b^3$	
2.° residuo $\quad 0$	

1.° Estraggo la radice cubica dal primo termine $27a^3$; essa è $3a$, che scrivo. In seguito, dopo aver formato il cubo di questa parte, e dopo averlo posto con un segno contrario sotto il polinomio proposto, fo la riduzione; il che mi dà per primo residuo $-54a^2 + 36ab - 8b^3$.

2.° Fo il quadrato della parte $3a$, e lo triplico; il che mi dà $27a^2$, quantità colla quale divido il primo termine $-54a^2b$ del primo residuo, e viene il quoto $-2b$, che scrivo alla radice. In seguito fo primieramente il prodotto di $27a^2$ per $-2b$, ed è $-54a^2b$: secondariamente, il prodotto del triplo del quadrato di $-2b$, per $3a$, che è $+36ab^2$: in terzo luogo, il cubo di $-2b$, che è $-8b^3$. Poi avendo scritta la somma di questi tre prodotti, con segni contrarj, sotto il

primo residuo, faccio la riduzione; e non rimane nulla. Onde concludo che la radice cubica esatta della quantità proposta è $3a - 2b$.

Qui non si può mettere il doppio segno $\pm$ innanzi alla radice, come per la radice quadrata.

Esempio II.

Estrarre la radice cubica dal polinomio $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3 + 27a^2c - 36abc + 12b^2c + 9ac^2 - 6bc_2 + c^3$?

Avendo ordinato questo polinomio, per rapporto ad a, l'operazione si fa come si vede nella tabella che segue:

Cubo supposto.	radice cubica.
($27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$	$3a - 2b + c$
($+ 27a^2c - 36abc + 12b^2c$	
($+ 9ac^2 - 6bc^2 + c^3$	$27a^2$
$-27a^3$	
	$27a^2 - 36ab + 12b^2$
($-54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$	
1.° residuo ($+27a^2c - 36abc + 12b^2c$	
($+ 9ac^2 - 6bc^2 + c^3$	
$+54a^2b - 36ab^2 + 8b^3$	
2.° residuo ($+27a^2c - 36abc + 12b^2c$	
($+ 9ac^2 - 6bc^2 + c^3$	
$-27a^2c - 36abc - 12b^2c$	
$- 9ac + 6bc^2 - c^3$	
3.° residuo 0	

I due primi termini della radice si trovano con un calcolo che è esattamente lo stesso di quello dell' esempio precedente. Ma per risparmiare ogni imbarazzo ai principianti, prendo a fare quì l' operazione intera.

1.° Estraggo la radice cubica dal primo termine $27a^3$; ed è $3a$ che scrivo. Ne fo il cubo, e scrivo questo cubo con un segno contrario, sotto il polonomio; e fatta la riduzione, ho il primo residuo scritto quì sopra.

2.° Faccio il quadrato di $3a$, e lo triplico, il che mi dà $27a^2$, quantità colla quale divido il primo termine $-54a^2b$ del primo residuo; il quoto è $-2b$, che scrivo al seguito di $3a$. Faccio tre prodotti, vale a dire, primieramente quello di $27a^2$ per $-2b$: secondariamente quello del triplo del quadrato di $-2b$ per $3a$; in terzo luogo il cubo di $-2b$. Queste tre quantità essendo aggiunte insieme, ne scrivo la somma, con segni contrarj sotto il primo residuo, e fo la riduzione. Da tutte queste operazioni risulta il secondo residuo che si vede quì sopra.

3.° Considero la parte $3a-2b$, co-

me formante un medesimo tutto; ne fo il quadrato, e lo triplico; il che mi dà $27a^2 - 36ab + 12b^2$. Col primo termine $27a^2$ di questa quantità, divido il primo termine $27a^2c$ del secondo residuo; il quoto è $+c$, che scrivo al seguito della prima parte $(3a - 2b)$ della radice. In appresso fo tre prodotti: cioè a dire, primo quello di $27a^2 - 36ab + 12b^2$, per c; secondo quello del triplo del quadrato di c per $3a - 2b$; terzo il cubo di c. E dopo avere scritta la somma di queste tre quantità con segni contrarj sotto il secondo residuo, faccio la riduzione, ed ho o per residuo Per conseguenza la radice esatta del polinomio proposto è $3a - 2b + c$.

59. Accade sovente che una quantità complessa da cui è proposto d'estrarre una radice, non è una potenza perfetta di questa radice; allora l'estrazione della radice non si può fare che per approssimazione col mezzo delle serie infinite. Queste serie si trovano facilmente colla *formola del binomio*, che abbiamo nel precedente capitolo trattato.

60. Di fatti abbiamo trovato che

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + p\frac{(p-1)}{2}a^{p-2}b^2$$

$+$ ec.; e fatto $p = \frac{m}{n}$, sarà $(a+b)^{\frac{m}{n}} =$

$$a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}b + \frac{m}{2n}\left(\frac{m}{n}-1\right)a^{\frac{m}{n}-2}b^2 + \text{ec.}$$

o sia $\sqrt[n]{(a+b)^m} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}a^{\frac{m-n}{n}}b +$

$\frac{m}{2n}\left(\frac{m}{n}-1\right)a^{\frac{m-2n}{n}}b^2 +$ ec. Posto $m = 1$, ed $n = 2$, si avrà

$$\sqrt{(a+b)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right)a^{-\frac{3}{2}}b^2 + \text{ec.}$$

Si voglia, per esempio, la radice quadrata di 5, si farà $a = 4$, e $b = 1$; e sarà

$$\sqrt{(4+1)} = 2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2^3} + \text{ec.}$$

$= 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8.8} +$ ec. Dunque prossima-

mente la $\sqrt{5} = 2\frac{15}{64}$. Tanti più termini si prenderanno del binomio sviluppato, tanto più esatta sarà la radice che si cerca.

Il metodo pertanto che devesi tenere per avere la radice prossima d'un numero, si è quello di spezzare il numero in due parti a e b tali, che a sia un quadrato, o un cubo, o ec., secondo che si dovrà estrarre la radice quadrata, o cuba, o ec., e b sia il restante del numero, che potrà essere anche negativo. In fatti, se si cercasse la radice quadrata di 3, si farebbe $a = 4$, e $b = 1$, e si avrebbe

$$\sqrt{(4-1)} = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2^3} \text{ ec.}$$

$$= 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} - \text{ec.} = 2 - \frac{17}{64} \text{ prossimamente.}$$

CAPITOLO V.

Prime operazioni sopra le quantità imaginarie.

61. Da quello che abbiamo detto de' radicali apparisce chiaramente, che di alcune quantità non si può esattamente esprimere il rapporto alle quantità intere o fratte; con tutto ciò esse si ammettono nell'Algebra, perchè il loro valore si può ottenere tanto prossimamente quanto piace. Un paradosso più grande ci presentano le quantità *imaginarie*, che s' incontrano nell' algebrica soluzione de' problemi, le quali non esistono, ed è impossibile lo esprimerle non solo esattamente ma nè pure per approssimazione. Nientedimeno l' analisi considera, ed insegna ad operare su queste quantità, si perchè qualche volta dall' unione di più quantità imaginarie ne nascono quantità reali, si perchè il valore imaginario di una quantità, dalla quale la soluzione di un problema dipende, mostra che questo problema è impossibile. Ciò meglio si comprenderà, quando par-

leremo della soluzione de' problemi.

62. Per ben conoscere la natura delle quantità imaginarie convien ricordarsi, che il quadrato di una quantità tanto positiva che negativa è sempre positivo: da ciò segue che è impossibile lo estrarre la radice quadrata da una quantità negativa. Se dunque nella soluzione di qualche problema siamo nel caso di dover estrarre la radice quadrata da una quantità negativa $-a^2$, questa radice non esiste, e perciò $\sqrt{-a^2}$ ha il nome di quantità imaginaria o impossibile. Per più semplicità questa quantità $\sqrt{-a^2}$ si esprime in altra maniera così $a\sqrt{-1}$, poichè essendo $-a^2 = \times a^2 - 1$, sarà $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \times -1} = a\sqrt{-1}$. Se ad una quantità imaginaria si aggiunge una reale, o se ne sottrae, o si moltiplica per essa, o l'una per l'altra si divide, il risultamento si deve reputare una quantità imaginaria. Così, essendo a, b, c reali, le quantità $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$, $a + bc\sqrt{-1}$, $\frac{a - b\sqrt{-1}}{c}$ sono tutte impossibili.

63 Essendo positivo il cubo di una quantità positiva, negativo quello di una quantità negativa, la radice cubica di una quantità negativa sarà sempre possibile, o sia reale; onde nelle radici cubiche non s' incontrano alcune quantità imaginarie. Ma la quarta potenza dovendo esser necessariamente positiva, da una quantità negativa non si può estrarre la radice quarta, e perciò $\sqrt[4]{-a^4} = a\sqrt[4]{-1}$ è imaginaria. L' istesso s' intenda di tutte le radici di esponente pari, le quali saranno imaginarie, se la quantità sotto il segno sarà negativa.

64. La somma e la sottrazione delle quantità imaginarie si fa nella solita forma, così $a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1}$, ed $a\sqrt{-1} - b\sqrt{-1}$ significa che la quantità $b\sqrt{-1}$ nel primo caso è aggiunta, nel secondo è tolta dalla quantità $a\sqrt{-1}$.

65. Se la quantità reale a si dovrà moltiplicare per l' imaginaria $b\sqrt{-1}$, il prodotto sarà $ab\sqrt{-1}$, ove per i segni vagliono le solite regole. Non

così succede se devono moltiplicarsi tra loro due quantità imaginarie, poichè essendo qualunque radice quadrata moltiplicata in se stessa eguale alla quantità posta sotto il segno radicale, sarà $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$, e quindi $a\sqrt{-1} \cdot b\sqrt{-1} = ab\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ $= ab \times -1 = -ab$, cioè il prodotto di due quantità imaginarie positive $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$ è reale e negativo $= -ab$. Lo stesso deve dirsi del prodotto di due quantità imaginarie negative, perchè
$-a\sqrt{-1} \times -b\sqrt{-1} = ab\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} =$ $-ab$. Se poi le quantità imaginarie sono di diverso segno, il prodotto è positivo, poichè $a\sqrt{-1} \times -b\sqrt{-1} =$ $-ab\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -ab \times -1 = ab$. Poste queste cose è facile adesso il moltiplicare tra loro le quantità imaginarie complesse, come mostra il seguente

Esempio

Si debbano moltiplicare tra loro le quantità $4a + 3\sqrt{b}\sqrt{-1} + 2c\sqrt{-1}$,

$6a - 2\sqrt{b}\sqrt{-1} + 3c\sqrt{-1}$; il prodotto si troverà come segue.

$$\begin{array}{l} 4a + 3\sqrt{b}\sqrt{-1} + 2c\sqrt{-1} \\ 6a - 2\sqrt{b}\sqrt{-1} + 3c\sqrt{-1} \\ \hline 24a^2 + 18a\sqrt{b}\sqrt{-1} + 12ac\sqrt{-1} \\ \quad - 8a\sqrt{b}\sqrt{-1} \qquad\qquad\qquad + 6b + 4c\sqrt{b} \\ \qquad\qquad\qquad + 12ac\sqrt{-1} \quad - 9c\sqrt{b} - 6c^2 \\ \hline 24a^2 + 10a\sqrt{b}\sqrt{-1} + 24ac\sqrt{-1} + 6b - 5c\sqrt{b} - 6c^2 \end{array}$$

66. Se una quantità imaginaria si dovià dividere per una reale, il quoziente si otterrà osservando per i segni le solite regole, così $\frac{ab\sqrt{-1}}{a} = b\sqrt{-1}$, $\frac{-ab\sqrt{-1}}{a} = -b\sqrt{-1}$, $\frac{ab\sqrt{-1}}{-a} = -b\sqrt{-1}$, $\frac{-ab\sqrt{-1}}{-a} = b\sqrt{-1}$. Ma se una quantità reale ab si dovrà dividere per una imaginaria $b\sqrt{-1}$, il quoziente sarà imaginario e negativo, cioè $= -a\sqrt{-1}$, poichè $\frac{ab}{b\sqrt{-1}} =$

$$\frac{a}{\sqrt{-1}} = \frac{-a\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\times-\sqrt{-1}} = \frac{-a\sqrt{-1}}{1} =$$

$-a\sqrt{-1}$. Così pure $\frac{-ab}{b\sqrt{-1}} = \frac{-a}{\sqrt{-1}} =$

$$\frac{-a\times-\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\times-\sqrt{-1}} = \frac{a\sqrt{-1}}{1} = a\sqrt{-1},$$

$$\frac{-ab}{-b\sqrt{-1}} = \frac{-a}{-\sqrt{-1}} = \frac{-a\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}} =$$

$-a\sqrt{-1}$; cioè se il dividendo reale e il divisore imaginario avranno i medesimi segni, il quoziente sarà negativo; se avranno segno diverso, il quoziente sarà positivo. Se poi la quantità imaginaria $ab\sqrt{-1}$ si deve dividere per l'imaginaria $b\sqrt{-1}$, il quoziente sarà $= a$, perchè $\frac{ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} =$

$\frac{a\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = a$, e così pure $\frac{-ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} =$

$-a$, e finalmente $\frac{-ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}} = a$;

cioè in questo caso i segni si regolano al solito. Per la divisione degl' imaginarj complessi diamo il seguente

Esempio

Si debba dividere la quantità
$24a^2+10ab\sqrt{-1}+24ac\sqrt{-1}+6b^2-5bc-6c^2$
per la quantità $4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1}$;
l' operazione si farà come segue

$$
\begin{array}{l|l}
4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1} & 24a^2+10ab\sqrt{-1}+24ac\sqrt{-1}+6b^2-5bc-6c^2 \\
6a-2b\sqrt{-1}+3c\sqrt{-1} & \underline{24a^2+18ab\sqrt{-1}+12ac\sqrt{-1}} \\
 & \quad -8ab\sqrt{-1}+12ac\sqrt{-1}+6b^2-5bc-6c^2 \\
 & \quad \underline{-8ab\sqrt{-1} \qquad\qquad\quad +6b^2+4bc} \\
 & \qquad\qquad 12ac\sqrt{-1} \qquad -9bc-6c^2 \\
 & \qquad\qquad \underline{12ac\sqrt{-1} \qquad -9bc-6c^2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

67. Passiamo alle potenze delle quantità imaginarie, e siccome $a\sqrt{-1} \times a\sqrt{-1}=-a^2$, sarà $(a\sqrt{-1})^2=-a^2$; quindi $(a\sqrt{-1})^3=-a^2 . a\sqrt{-1}=-a^3\sqrt{-1}$, $(a\sqrt{-1})^4=-a^3\sqrt{-1} . a\sqrt{-1}=-a^4\sqrt{-1} . \sqrt{-1}=a^4$, $(a\sqrt{-1})^5=a^4 . a\sqrt{-1}=a^5\sqrt{-1}$, $(a\sqrt{-1})^6=a^5\sqrt{-1} . a\sqrt{-1}=-a^6$, ec.

Sono dunque reali tutte le potestà pari di $(a\sqrt{-1})$, imaginarie le dispari. Le potestà degl' imaginarj complessi si troveranno per mezzo del teorema *Newtoniano*, e sarà

$$(a+b\sqrt{-1})^n = a^n + na^{n-1}b\sqrt{-1} - n\frac{(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 - n\frac{(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}a^{n-3}b^3\sqrt{-1}$$

$+$ ec.

CAPITOLO VI.

Della risoluzione de' Problemi, e dell'equazioni del primo grado determinate.

68. Se due quantità semplici o composte, sono eguali fra loro, l'espressione simbolica di siffatta eguaglianza è ciò che chiamasi un' *equazione*. Per esempio, l'espressione $9+3=7+5$, è un'equazione. Medesimamente $a+b=c+d$, $x^2+bx=cd$, sono equazioni. Le due parti separate dal segno $=$, si chiamano i *membri* dell'equazione. Ciascun membro può essere composto d' uno o più termini.

69. Le equazioni servono ad esprimere in un modo compendioso i ragionamenti che si devono fare per risolvere una questione; esse ne sono per così dire la traduzione algebrica. Ora fra le quantità che in tal modo si paragonano insieme, alcune sono *cognite*, ed altre *incognite*. D' ordinario le prime si rappresentano colle prime lettere a, b, c, d, ec. dell'alfabetto, e le seconde colle ultime lettere t, x, y, z; ma ciò è arbitrario. Si fanno altronde esattamente le medesime operazioni di calcolo sopra le une, e sopra le altre. L' oggetto finale d' un' equazione che contiene un' incognita, è sempre di far conoscere questa quantità, o come si dice di *liberare l' incognita*. Quest' arte si chiama ancora *la risoluzione delle equazioni*.

70. Si distinguono due sorti di problemi; i problemi *determinati*, ed i problemi *indeterminati*. I primi sono quelli le cui condizioni espresse in linguaggio algebrico conducono ad un' equazione finale che contiene una sola incognità; e questa equazione si chiama in conseguenza *equazione determina-*

ta. I problemi indeterminati conducono ad un' equazione finale che contiene più incognite, e chiamasi *equazione indeterminata*.

71. Le equazioni determinate, o indeterminate sono di diversi gradi, cioè del primo grado o del secondo o del terzo o del quarto, ec., secondo che la più alta potenza dell' incognita o di una delle incognite in un termine, o il prodotto di diverse incognite mescolate insieme in un termine, è d' una dimensione o di due dimensioni o di tre o di quattro, ec. Così essendo x l' incognita, l' equazione $ax + bc = cd$, è del primo grado, perchè l' incognita è d' una sola dimensione. L' equazione $bx^2 + bcx = m^3 + n^3$, è del secondo grado, perchè nel termine bx^2, l' incognita forma due dimensioni, essendo x^2 la stessa cosa di xx. L' equazione $x^3 + bx^2 + c^2 x = m^3$, è del terzo grado, perchè il termine x^3 è di tre dimensioni, formate dalla sola incognita x; e così di seguito. Tutte queste equazioni sono determinate. Prendiamo per esempio d' una equazione indeterminata questa $ax + xy + by = cd$,

nella quale x ed y sono le incognite; questa equazione è del secondo grado, perchè il termine xy, che contiene il prodotto di due incognite, è di due dimensioni. Le equazioni indeterminate $ax^3 + bxy + b^3y = m^4$, $ax^2 + xy^2 + by^2 = h^3$, sono del terzo grado, perchè nel termine ax^3 della prima, l'incognita essendo elevata alla terza potenza, forma tre dimensioni; e nella seconda le incognite x ed y formano altresì tre dimensioni nel termine xy^2; così di seguito.

Le quantità cognite e date non entrano mai per nulla nella stima del grado d'un'equazione; esso si regola soltanto dalle incognite, come abbiamo spiegato.

72. Problema I. *Risolvere un'equazione determinata qualunque del primo grado?*

Tutta l'arte di risolvere le equazioni determinate del primo grado è di fare in modo che l'incognita sia sola in un membro, mentre le altre quantità supposte cognite, sono nell'altro membro; allora l'incognita è evidentemente liberata, perciocchè si trova e-

guale ad un risultamento di quantità tutte cognite. Ora si giungerà sempre a questo fine, sia coll' aggiungere a ciascun membro o sottrarne una stessa quantità; sia col moltiplicare o dividere ciascun membro per una stessa quantità; sia coll' innalzare l' uno e l' altro alla stessa potestà; sia col cavare dall' una e dall' altra parte una stessa radice. Egli è chiaro che tutte queste operazioni ausiliarie producono dalle due parti del segno $=$ delle quantità ancora eguali tra loro, poichè si fanno subire con ciò i medesimi cambiamenti ai due membri della data equazione primitiva. (*a*)

Per esempio, sia l' equazione $x \pm a = b + c$, nella quale tutto è cognito, ec-

(*a*) Tutti gli artificj di calcolo, de' quali accade di far uso nello scioglimento delle equazioni, e che l'Autore spiega partitamente in questo Capo, hanno per base i seguenti assiomi:

1.° Che se siano $A = B$, e $C = D$, saranno anche la somma $A + C = B + D$, e la differenza $A - C = B - D$;

2.° Che nella stessa supposizione di $A = B$, e $C = D$, saranno altresì il prodotto $AC = BD$, e il quoto $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$;

cetto x. Scrivo dall' una e dall' altra parte $\mp a$, affinchè questa quantità distrugga $\pm a$ nel primo membro; allora io ho $x = b + c \mp a$, e l' incognita x è liberata.

Da questo esempio si vede che sottraendo da ciascun membro dell' equazione e aggiungendo a ciascun membro una stessa grandezza che si trova in uno di essi, questa grandezza sparisce dal membro ov' è, per riprodursi nell' altro membro con un segno contrario; ciò è quanto è accaduto a $\pm a$, allorchè dall' equazione $x \pm a = b + c$, si è ricavato $x = b + c \mp a$. Ciò si chiama *trasporre un termine:* operazione d' un uso frequente.

Sia l' equazione $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{d}{c}$. La prima cosa che devo fare per giugnere a

3.° Che essendo uguali tra loro le due quantità A, B, lo saranno pure le loro omologhe potenze A^m, B^m, e le loro radici omologhe $\sqrt[m]{A}$, $\sqrt[m]{B}$;
4.° Che due quantità A, B, uguali ciascuna ad una terza C, sono necessariamente uguali anche tra loro.

liberare l' incognita x, è di sbarazzarla dal divisore a che l' affetta. Ora per ciò, moltiplico tutti i termini dell' equazione per a; il che non distrugge l' uguaglianza del primo membro col secondo, e mi dà $x+\frac{ab}{c}=\frac{ad}{c}$. In seguito traspongo il termine $\frac{ab}{c}$, ed ho $x=\frac{ad}{c}-\frac{ab}{c}$.

Si farebbe nello stesso modo, se il divisore di x fosse complesso, come per esempio, se si avesse l' equazione $\frac{x}{a+b-c}+\frac{h}{g}=\frac{f}{m}$. In primo luogo, coll' indicare semplicemente la moltiplica di tutti i termini dell' equazione pel divisore $a+b-c$, si avrebbe $x+\frac{h(a+b-c)}{g}=\frac{f(a+b-c)}{m}$. In seguito trasponendo il termine $\frac{h(a+b-c)}{g}$, ver-

rebbe $x=\frac{f(a+b-c)}{m}-\frac{h(a+b-c)}{g}$, ovvero (effettuando le moltipliche indicate),

$x=\frac{af+bf-cf}{m}-\frac{(ah+bh-ch)}{g}$, ovvero ancora (riducendo le due frazioni al medesimo denominatore) $x=\frac{afg+bfg-cfg}{gm}$

$-\left(\frac{ahm+bhm-chm}{gm}\right)$, o finalmente

$$x=\frac{afg+bfg-cfg-ahm-bhm+chm}{gm}.$$

Sia l'equazione $\frac{ax}{b}+\frac{bc}{d}=\frac{ex}{f}+\frac{bg}{m}$;

Fo sparire le frazioni, moltiplicando successivamente ciascun termine per ciascun denominatore b, d, f, m. Con ciò, ho primieramente $ax+\frac{b^2c}{d}=\frac{bex}{f}$ $+\frac{b^2g}{m}$; secondariamente $adx+b^2c$

$= \frac{bdex}{f} + \frac{b^2dg}{m}$; in terzo luogo $adfx + b^2cf = bdex + \frac{b^2dfg}{m}$; e finalmente $adfmx + b^2cfm = bdemx + b^2dfg$ Essendo pervenuto a quest' ultimo risultamento, metto nel primo membro tutti i termini che contengono x, e tutti gli altri nel secondo. Ciò si fa trasponendo i due termini b^2cfm, e $bdemx$ Ho dunque così $adfmx - bdemx = b^2dfg - b^2cfm$, ovvero $x(adfm - bdem) = b^2dfg - b^2cfm$. Adesso dividendo tutto per la quantità $adfm - bdem$, che moltiplica x; avrò l' incognità x sola nel primo membro in questo modo $x = \frac{b^2dfg - b^2cfm}{adfm - bdem}$.

Se si avesse un'equazione di questa specie $\sqrt{x} + \sqrt{c} = \sqrt{[m + n]}$; trasponendo primieramente $\sqrt{c}$, si avrebbe $\sqrt{x} = \sqrt{[m + n]} - \sqrt{c}$. In seguito elevando tutto al quadrato, si avrebbe $x = (\sqrt{[m + n]} - \sqrt{c})^2$.

Tali sono i principj generali con cui si risolverà facilmente in tutti i casi

un' equazione qualunque del primo grado. Prendo ora ad applicare questi principj alla soluzione di diversi problemi particolari, che conterranno una più ampia dichiarazione delle regole precedenti.

73. Problema II. *Trovare un numero che essendo aggiunto alla sua metà ed al suo terzo, dia* 110 *per somma*.

Traduciamo questa questione in linguaggio algebrico. Sia x il numero cercato; la sua metà sarà $\frac{x}{2}$, ed il suo terzo $\frac{x}{3}$. Aggiungendo insieme queste tre quantità, si avrà per somma $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$. Ora per ipotesi, questa somma deve essere uguale a 110; dunque si avrà l'equazione $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 110$.

Per giugnere a liberare l'incognita x, fo sparire le frazioni, col mol-

tiplicare successivamente tutti i termini pei denominatori 2 e 3. In tal guisa trovo primieramente $2x+x+\frac{2x}{3}=220$, poi $6x+3x+2x=660$, ovvero $11x=660$. Dividendo tutto per 11, avrò $x=60$. Di fatti, aggiungendo a 60 la sua metà 30 ed il suo terzo 20, si avrà 110 per somma.

74. Problema III. *Che età abbiamo noi insieme, domanda un figlio a suo padre? Il padre risponde: la vostra età è attualmente il terzo della mia, e sei anni sono, n' era il quarto: trovate l' età di ciascuno.*

Sia, prendendo l' anno per unità, x l' età attuale del padre: sarà $\frac{x}{3}$ l' età attuale del figlio. Sei anni sono l' età del padre era $x-6$, e similmente l' età del figlio era $\frac{x}{3}-6$. Ora (ip.) l' età del padre era allora quadrupla di quella del figlio; dunque si ha l' equazione

$x-6=4\left(\frac{x}{3}-6\right)$, ovvero $x-6=\frac{4x}{3}-24$. Moltiplicando tutto per 3 per far sparire la frazione, si avrà $3x-18=4x-72$, ovvero (trasponendo i due termini $3x$ e -72), $72-18=4x-3x$, cioè $54=x$. Quindi il padre ha attualmente 54 anni, ed il figlio 18 anni.

75 Problema IV. *Un Operajo si è impegnato per* 60 *giorni, a condizione che gli si darebbe* 15 *soldi ogni giorno che lavorasse, e che egli darebbe* 5 *soldi ogni giorno che non lavorasse: a capo di* 60 *giorni, riceve* 24 *lire. Quanti giorni ha egli lavorato?*

Sia x il numero cercato de' giorni, e per conseguenza $60-x$ il numero de' giorni che l' operajo non ha lavorato. Esprimendo con lire il guadagno e la perdita, è chiaro che siccome 15 soldi sono i tre quarti d' una lira, e 5 soldi il quarto; il guadagno che fa l' operajo durante il numero di giorni x, è $\frac{3}{4}x$, e la perdita che fa durante il numero di giorni $(60-x)$, è $\frac{1}{4}(60-x)$. Ora (ip.) il guadagno, meno

la perdita, è 24 lire: dunque si ha l' equazione $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}(60-x) = 24$, ovvero $\frac{3}{4}x - 15 + \frac{1}{4}x = 24$, ovvero $x - 15 = 24$. Dunque trasponendo -15, si avrà $x = 39$. Dunque l' operajo ha lavorato 39 giorni, ed è stato 21 giorni senza far nulla.

76. PROBLEMA V. *Due Corrieri* A, B *partono da un medesimo luogo e colla stessa direzione*, 10 *ore l' uno innanzi l' altro: il primo fa* $\frac{9}{4}$ *di lega in un' ora, ed il secondo* $\frac{7}{2}$; *si domanda a capo di qual tempo il secondo raggiugnerà il primo?*

Sia, prendendo l' ora per unità, x il numero delle ore che il secondo Corriere B dovrà camminare, dal momento della sua partenza fino all' istante in cui raggiunga il primo A. È chiaro che il numero delle ore di cammino del Corriere primo A, computato dal momento della sua partenza, sa-

rà $x + 10$. D'altronde, poichè A fa $\frac{9}{4}$ di lega in un'ora, il numero di leghe da lui corse in ore $x + 10$, avrà per espressione il prodotto di $\frac{9}{4}$ in $(x + 10)$ o sia $\frac{9}{4} \times (x + 10)$; come $\frac{7}{2} \times x$ esprimerà, per simil ragione, il numero delle leghe corse da B in ore x.

Ma i due Corrieri partono, per ipotesi dal luogo medesimo, e vanno entrambi pel medesimo verso. Dunque saranno uguali gli spazj percorsi dall'uno e dall'altro, dal punto della partenza fino a quello dell'incontro; e si avrà quindi l'equazione $\frac{9}{4}(x + 10) = \frac{7}{2}x$, o sia $\frac{9x + 90}{4} = \frac{7x}{2}$. Impiegandovi gli artificj opportuni, onde liberare l'incognita, si trova finalmente $x = 18$: si trova cioè che il secondo Corriere dee camminar 18 ore, affin di raggiugner

l'altro, partito dallo stesso luogo 10 ore innanzi.

Se si voglia inoltre sapere il numero delle leghe che avrà fatto ciascun de' due Corrieri, allorchè s'incontrano, basterà moltiplicare il numero delle ore impiegate nel corso da ciascun di loro, per la rispettiva velocità, vale-a-

dire $\frac{7}{2}$ per 18, oppure $\frac{9}{4}$ per $18 + 10$.

Il prodotto sarà in un caso e nell'altro 63: ed il punto d'incontro sarà quindi distante 63 leghe dal punto della partenza.

77. Problema VI. *Supponiamo adesso per proporre la medesima questione più generalmente, che i due Corrieri non partano dal medesimo luogo, ma che il primo* A *parta da un luogo più avanzato verso il termine a cui tendono entrambi, d'un numero di leghe espresso da* a*; che egli parta avanti il secondo* B *un numero di ore espresso da* h*; che finalmente, nell'intervallo di un' ora,* A *faccia un numero di leghe espresso da* m*, e* B *un numero di leghe espresso da* n*: si domanda in capo a quan-*

to tempo il secondo Corriere raggiungerà il primo?

Sia come sopra, x il numero delle ore per cui avrà camminato il secondo Corriere B, dal momento della sua partenza sino all' istante in cui raggiunge A; $x+h$ esprimerà il numero delle ore, per cui avrà camminato A, prima d' essere raggiunto da B.

Di più, esprimendosi per m, n le leghe fatte da ciascuno de' due Corrieri nell' intervallo di un' ora, è chiaro che $m\times(x+h)$ e $n\times x$ esprimeranno il numero delle leghe trascorse da A e da B, dai punti della loro partenza rispettiva fino a quello dell' incontro.

Infine poichè il primo Corriere ha di vantaggio il cammino a sopra il secondo, non potrà questi raggiugnerlo, se non percorre uno spazio eguale alla suddetta distanza a, più lo spazio $m\times(x+h)$ percorso dal medesimo primo Corriere. In conseguenza dovrà aversi l' equazione $n\times x=a+m\times(x+h)$, o sia $nx=a+mx+hm$.

Facciamo colla trasposizione, che passino nel medesimo membro tutti i termini, ov' entra l' incognita: ne verrà

l' equazione $nx - mx = a + hm$, ovvero $x(n-m) = a + hm$, ovvero ancora (dividendo entrambi i membri pet fattore $n-m$) $x = \frac{a+hm}{n-m}$.

Questa equazione è una formola generale, per cui, sostituendo alle quantità indefinite a, h, m, n, i loro particolari valori numerici, si avrà lo scioglimento di tutte le questioni determinate dello stesso genere, che propor si possano. Per esempio, se si voglia dalla nostra formola ricavar la soluzione del quesito particolare enunciato nel problema precedente, non si avrà che a supporre nulla ossia $=0$ la quantità a, destinata ad esprimere la distanza de' punti da cui partono i due Corrieri. In appresso si faranno $h=10$, $m=\frac{9}{4}$, $n=\frac{7}{2}$. Sostituiti questi numeri alle lettere corrispondenti, riuscirà . . . . $x = \frac{a+hm}{n-m} = \frac{0-10\frac{9}{4}}{\frac{7}{2}-\frac{9}{4}} = 18$, come sopra.

Mercè la formola stessa è agevole ottenere altresì un' espressione generale degli spazj, ossia del numero delle leghe, che deve scorrere ciascuno de' Corrieri, dal punto della rispettiva partenza fino a quello dell' incontro. Già si è veduto che questo spazio è espresso da $m(x+h)$ per riguardo al Corriere A, e da $n \times x$ per risguardo a B: mettendo in queste formole, invece di x, il suo valore $\frac{a+hm}{n-m}$, si troverà $\frac{an+hmn}{n-m}$ per valore del viaggio di A, e $\frac{an+hmn}{n-m}$ per espressione del viaggio di B.

Nell' ipotesi particolare del problema precedente, erano $a=0$, $h=10$, $m=\frac{9}{4}$, $n=\frac{7}{2}$. Surrogando alle lettere questi valori, riuscirà eguale a 63 il numero delle leghe fatte così dal primo Corriere come dal secondo, fino al punto del loro incontro.

Se il Corriere A si debba supporre partito nel momento stesso, in cui parte B, si adatteranno le formole generali anche a questa supposizione, col fare semplicemente $h = o$, e nulli per conseguenza tutti i termini che si trovano moltiplicati dalla stessa h.

78. Abbiamo risolnto le questioni precedenti senza adoperare, per esprimere le condizioni più d' un' incognita. Ma sovente si ha bisogno, o almeno è cosa comoda di adoperare più incognite. Allora si formano se è possibile, altrettante equazioni, quante sono le incognite; queste equazioni combinate insieme servono a cacciare o ad *eliminare* successivamente tutte le incognite, meno una; e si perviene ad un'equazione finale che contiene un' incognita sola, e che si risolve come abbiamo spiegato. Alcuni esempi faranno comprendere tutto ciò chiaramente.

79. Problema VII. *Trovare due numeri, la cui somma sia* a, *e la differenza* d?

Sia x il maggiore de' due numeri cercati, e y il minore. Si avranno, secondo le condizioni del problema, le due equazioni $x + y = a$, $x - y = d$.

Ricaviamo da ciascuna di esse il valore d' una delle incognite, per esempio di y. La prima darà $y=a-x$; la seconda $y=x-d$. Ora $y=y$; per conseguenza si avrà $a-x=x-d$, equazione che non contiene più che la sola incognita x, e dalla quale si raccoglie $x=\frac{a+d}{2}$. Mettiamo questo valore di x in una dell' equazioni primitive, per esempio, nell' equazione $y=a-x$; avremo $y=a-\left(\frac{a+d}{2}\right)=\frac{a-d}{2}$.

È chiaro che si sarebbe trovato il medesimo valore per y, mettendo in vece di x il suo valore nell' altra equazione primitiva $y=x-d$; poichè le due quantità $a-x$ ed $x-d$ sono eguali fra loro.

Questi valori di x e di y fanno vedere che *in generale il maggiore de' due numeri è uguale alla metà della loro somma, più la metà della loro differenza; e che il minore è uguale alla metà della loro somma, meno la metà della loro differenza.*

Supponiamo per esempio, che la somma a sia 60, e che la differenza d sia 12; si avrà $x=36$, $y=24$.

80 Il metodo che abbiamo adoperato per liberare le due incognite x ed y, è generale; ma si può sovente ottenere il medesimo scopo in una maniera più breve, sia con aggiugnere insieme le equazioni, sia con sottrarre l'una dall'altra. Così per esempio, avendo le due equazioni $x+y=a$, $x-y=d$; se si aggiungono insieme, si avrà ad un tratto $2x=a+d$, o sia $x=\frac{a+d}{2}$; e se si sottrae la seconda dalla prima, si avrà $2y=a-d$, o sia $y=\frac{a-d}{2}$.

81. Problema VII. *Per un primo contratto, pagaronsi lire* m *per oncie* p *d'argento ed oncie* q *d'oro: in una seconda compra, si spesero lire* n *per oncie* c *d'argento ed oncie* d *di oro. Supponendo non variati i prezzi da un' epoca all' altra, quante lire l'oncia costò ciascuno de' due metalli?*

Rappresenti x il valore incognito di

un' oncia d' argento, e rappresenti y quello di un' oncia d' oro, espressi entrambi in lire. Dietro a queste denominazioni $px + qy$ rappresenterà il prezzo di oncie p d' argento e d' oncie q di oro; e s' avrà in conseguenza per prima equazione $px + qy = m$. È chiaro dal pari che $cx + dy$ esprimerà la spesa occorsa nel secondo contratto: ed avremo per seconda equazione.. $cx + dy = n$.

Ricaviamo da ciascuna di queste due equazioni il valore di una medesima incognita, per esempio di x. La prima equazione ne darà $x = \frac{m - qy}{p}$: la seconda $x = \frac{n - dy}{c}$. Pareggiando dunque i due valori di x, si avrà una terza equazione $\frac{m - qy}{p} = \frac{n - dy}{c}$, la quale non conterrà più che la sola incognita y.

Se si moltiplichino per cp entrambi i membri di quest' ultima equazione, ne verrà $cm - cqy = np - dpy$, o

sia $dpy - cqy = np - cm$, ovvero ancora $y(dp - cq) = np - cm$. E dividendo pel fattore $dp - cq$, s' otterrà finalmente $y = \frac{np - cm}{dp - cq}$, cioè una delle incognite espressa in quantità del tutto note.

Affine di ottenere altrettanto rispetto alla prima incognita x, sarà d' uopo tornare ad una delle due equazioni superiori, per esempio alla $x = \frac{m - qy}{p}$, col sostituire in essa, invece di y, il suo valore determinato poc' anzi, e avremo

$$x = \frac{m - q\,\frac{np - cm}{dp - cq}}{p}$$

$$= \frac{dmp - cmq - npq + cmq}{p(dp - cq)} = \frac{dm - nq}{dp - cq}.$$

Per fare l'applicazione di queste formole generali a qualche caso particolare, supponiamo comprate da prima 5 oncie d' argento e 3 di oro per la somma di lire 113; poi oncie 7 d' argento e 5 d' oro

per 1827 lire. Questa ipotesi renderà $m = 1113$, $p = 5$, $q = 3$, $n = 1827$, $c = 7$, $d = 5$;

In conseguenza $\frac{dm - nq}{dp - cq}$ (valore di x, o sia d' un' oncia d' argento) si troverà

$$= \frac{5 \cdot 1113 - 1827 \cdot 3}{5 \cdot 5 - 7 \cdot 3} = \frac{5565 - 5481}{25 - 21}$$

$= \frac{84}{4} = 21$; e $\frac{np - cm}{dp - cq}$ (valore di y, o sia d' un' oncia d' oro) riuscirà . . . .

$$= \frac{1827 \cdot 5 - 7 \cdot 1113}{5 \cdot 5 - 7 \cdot 3} = 336 \text{ lire}.$$

82. Anche in questo problema si poteva eliminare una delle due incognite x, y col mezzo indicato di sopra; ma ciò avrebbe richiesta una particolar preparazione che torna bene di qui spiegare, onde trasportarla occorrendo, ad altri casi analoghi.

Trovate le due equazioni fondamentali

(A) $px + qy = m$,

(B) $cx + dy = n$,

se vogliasi cominciare dalla eliminazio-

ne di x, converrà moltiplicare per c l' equazione A, e per p l' equazione B. Esse diveranno per tal modo

$$cpx + cqy = cm,$$
$$cpx + dpy = np,$$

e sottraendo (membro per membro) la prima dalla seconda, s' avrà una terza equazione

$$cpx + dpy - cpx - cqy = np - cm,$$

o sia

$$dpy - cqy = np - cm,$$

la quale non conterrà più che la sola y,

e darà come sopra $y = \frac{np - cm}{dp - cq}$.

Il metodo è ancora lo stesso, ove vogliasi eliminare la y; se non che allora fa d' uopo moltiplicare per d la prima delle equazioni fondamentali A, e per q la seconda B. Si ottengono così due nuove equazioni

$$dpx + dqy = dm,$$
$$cqx + dqy = nq;$$

la seconda delle quali sottratta dalla prima, lascia

$$dpx - cqx = dm - nq,$$

ed in conseguenza $x=\frac{dm-nq}{dp-cq}$, come prima.

Potendo i valori delle lettere p, q, m, c, d, n determinarsi ad arbitrio, e prendersi o positivi o negativi, come lo esigano le circostanze particolari del problema, è manifesto che le due equazioni A, B sono atte a rappresentare, in tutta la generalità possibile, l'espressione di un problema qualunque di primo grado a due incognite. D'onde segue che in generale, si potrà sempre coll' esposto metodo eliminare una delle due incognite, per esempio la x, moltiplicando la prima equazione pel coefficiente c che ha l'incognita x nell' equazione seconda, poi moltiplicando la seconda equazione pel coefficiente p che ha la x medesima nell' equazione prima, e sottraendo finalmente una delle due equazioni dall' altra.

Invece di moltiplicare entrambe le equazioni, si può, se piaccia, operare sopra una sola, per esempio la prima; ma allora il moltiplicatore di cui occorre far uso, dovrà essere $\frac{c}{p}$, cioè il

coefficiente di x nella seconda equazione, diviso pel coefficiente della stessa x nell' equazione prima. Di fatti l' equazione $px + qy = m$, moltiplicata

per $\frac{c}{p}$, diviene $\frac{cpx}{p} + \frac{cqy}{p} = \frac{cm}{p}$, o

sia $cx + \frac{cqy}{p} = \frac{cm}{p}$; dalla quale levando l'equazione seconda $cx + dy = n$, si ha immediatamente una terza equazione $\frac{cqy}{p} - dy = \frac{cm}{p} - n$

in cui non entra che la sola incognita y.

Se incambio di x, si volesse eliminare la y, $\frac{d}{q}$ sarebbe il moltiplicatore opportuno: e sarebbe $\frac{p}{c}$ o $\frac{q}{d}$, se la moltiplicazione dovesse eseguirsi sulla seconda delle date equazioni, non sulla prima.

83. Problema IX. *Tre Giuocatori hanno fatto guadagni tali, che la som-*

ma del primo guadagno e della metà degli altri due è a; *la somma del secondo e della terza parte degli altri due è* b; *la somma del terzo e della quarta parte de' due altri è* c: *si domanda quale è il guadagno di ciascun giuocatore?*

Siano x, y, z i tre guadagni cercati. Si avrà, secondo le condizioni del problema $x+\frac{y+z}{2}=a$, $y+\frac{x+z}{3}=b$, $z+\frac{x+y}{4}=c$. Ricavo da ciascuna di queste tre equazioni un valore di z, ed ho $z=2a-2x-y$, $z=3b-3y-x$, $z=\frac{4c-x-y}{4}$. Uguagliando il primo valore di z col secondo e col terzo, formo le due equazioni, $2a-2x-y=3b-3y-x$, e $2a-2x-y=\frac{4c-x-y}{4}$, le quali non contengono più che due incognite x ed y. Ricaviamo da ciascuna di esse il valore

di y. La prima dà $y = \frac{3b-2a+x}{2}$; la seconda $y = \frac{8a-7x-4c}{3}$. Quindi si avrà l'equazione $\frac{3b-2a+x}{2} = \frac{8a-7x-4c}{3}$, la quale non contiene che la sola incognita x, e da cui si ricava . . . .

$$x = \frac{22a-8c-9b}{17}.$$

Mettiamo questo valore di x nell'equazione $y = \frac{3b-2a+x}{2}$; troveremo

$$y = \frac{21b-6a-4c}{17}.$$

Finalmente mettiamo i valori di x e di y nell'equazione $z = 2a - 2x - y$; troveremo $z = \frac{20c-3b-4a}{17}$.

I tre guadagni x, y, z sono dunque espressi in quantità tutte cognite, e sono per conseguenza cogniti.

Supponiamo, per fare una prima applicazione di queste formole $a=4$, $b=3$, $c=2$. Si troverà $x=\frac{45}{17}$, $y=\frac{31}{17}$, $z=\frac{15}{17}$. Il primo guadagno adunque sarà espresso dalla frazione $\frac{45}{17}$, il secondo dalla frazione $\frac{31}{17}$, ed il terzo dalla frazione $\frac{15}{17}$. Queste frazioni esprimono parti di scudo, o di lira, o di soldo, ec., secondo che si prende per unità lo scudo, o la lira, o il soldo, ec.

Supponiamo, per secondo esempio $a=1$, $b=2$, $c=3$. Si troverà $x=-\frac{20}{17}$, $y=\frac{24}{17}$, $z=\frac{50}{17}$. In questo caso il valore di x essendo negativo, ciò significa che bisogna prendere x in un senso opposto a quello che le abbiamo attribuito nel processo del calcolo. Quindi, in vece di supporre che il

primo giuocatore ha fatto un *guadagno*, bisogna supporre che ha fatta una *perdita*. Questa perdita è espressa da $\frac{20}{17}$, mentre i guadagni degli altri due giuocatori sono espressi rispettivamente da $\frac{24}{17}$, e $\frac{50}{17}$. Di fatti una perdita di $\frac{20}{17}$ e la metà della somma de' due guadagni $\frac{24}{17}$, $\frac{50}{17}$, non fanno che 1 di guadagno effettivo, come ciò deve essere in virtù della prima equazione $x+\frac{y+z}{2}=a$, o $x+\frac{y+z}{2}=1$. Si proverà nella stessa maniera che le condizioni delle altre due equazioni $y+\frac{x+z}{3}=b=2$, $z+\frac{x+y}{4}=c=3$, sono adempite dai valori $x=-\frac{20}{17}$, $y=\frac{24}{17}$, $z=\frac{50}{17}$.

Se nello stabilire le equazioni fondamentali del problema, in vece di supporre che x, y, z esprimano tre guadagni o tre quantità dello stesso genere di a, b, c, si fosse supposto che x esprime una perdita, mentre y e z esprimono de' guadagni o delle quantità dello stesso genere di a, b, c, egli è evidente che si sarebbero avute le tre equazioni $-x+\frac{y+z}{2}=a$, $y+\frac{z-x}{3}=b$, $z+\frac{y-x}{4}=c$; dalle quali si cava $x=\frac{8c+9b-22a}{17}$; $y=\frac{21b-6a-4c}{17}$, $z=\frac{20c-3b-4a}{17}$.

Allora supponendo $a=1$, $b=2$; $c=3$, si troverebbe $x=\frac{20}{17}$, $y=\frac{24}{17}$, $z=\frac{50}{17}$. Il valore di x si produce adesso sotto una forma positiva, perchè nello stabilire le equazioni generali, si

è supposto che x esprimeva una perdita, e si è terminato il calcolo in conseguenza di questa supposizione. Ma se si volesse far uso di queste stesse equazioni per risolvere il caso in cui fosse $a=4$, $b=3$, $c=2$, si troverebbe $x=-\frac{45}{17}$, $y=\frac{31}{17}$, $z=\frac{15}{17}$. Il valore di x è adesso negativo; e ciò significa che x deve essere presa in un senso contrario a quello che le abbiamo attribuito nelle nuove equazioni, cioè a dire, che questa quantità deve essere risguardata come un guadagno, e non come una perdita.

84. L' osservazione che abbiamo fatta sopra il modo con cui devono essere considerate le incognite, secondo che si presentano col segno $+$ o col segno $-$, non è particolare all' esempio che l' ha fatta nascere; essa è vera generalmente. Ecco adunque una massima universale ed importantissima dell' Algebra. Allorchè avete da risolvere una questione, e che dall' enunziato de' suoi termini non vedete se la quantità che cercate, debba essere positiva

ò negativa, cioè se questa quantità debba essere presa o nel senso di quelle che sono risguardate come positive, o nel senso di quelle che sono risguardate come negative; ciò non vi faccia difficoltà: considerate l'incognita come positiva, e terminate tutte le parti del vostro calcolo conseguentemente a questa supposizione: se nell'equazione finale il valore dell'incognita è positivo, ciò fa vedere che la vostra supposizione era legittima; se al contrario il valore dell'incognita è negativo, ciò significa che l'incognita deve essere presa in un senso contrario a quello che le avete attribuito nel processo del calcolo. Il medesimo ragionamento avrebbe luogo in un ordine inverso, se si fosse riguardata l'incognita come negativa. Il calcolo raddrizza in tutti i casi le false supposizioni che si possono esser fatte nello stabilire i suoi elementi; e questo è uno de' più preziosi vantaggi dell'Algebra.

85. La stessa cosa vale tanto per le quantità cognite, come per le incognite. Se nell'applicazioni particolari che si possono fare d'un'equazione che es-

prime generalmente le condizioni d' un problema, si riguardano come negative delle quantità cognite a, b, c, ec., che eransi riguardate come positive nel calcolo, o viceversa, ciò equivalerà al prendere queste quantità in sensi contrarj che si sono loro da prima attribuiti.

Ripigliamo per esempio, il problema dell'articolo 74; e vediamo come l'equazione generale $x = \frac{a + hm}{n - m}$, trovata allora, riesce mercè gli opportuni cambiamenti di segni, a rappresentare le diverse particolari modificazioni di cui è suscettibile il problema stesso.

Suppongasi in primo luogo che il Corriere A, invece di partire ore h innanzi il Corriere B, come portava l'ipotesi dell'articolo 74, parta al contrario ore h dopo di lui. Questa circostanza obbligherà a prendere la quantità h in senso opposto a quello in cui s'era presa nella soluzion generale; in conseguenza dovrà cambiarsi segno ai termini della formola, ne' quali h entra come fattore, e l'equazion genera-

le $x = \frac{a + hm}{n - m}$ (che nell' articolo 74 esprimeva le ore per cui dee camminare il Corriere B, avanti di raggiugnere A) muterassi, per questo caso, nell' altra $x = \frac{a - hm}{n - m}$.

Se in secondo luogo, oltre il supporre B partito ore h prima di A, si supponga altresì che A, invece di fuggire da B, come era l' ipotesi dell' articolo 74, gli venga incontro: allora anche la quantità m soggiacerà a mutazione di segno. Perocchè esprime essa il cammino che fa in un' ora il Corriere A, cammino che essendosi considerato come positivo, quando tendeva ad allontanare A da B, dee necessariamente prendersi in senso negativo, ora che è volto in direzione del tutto contraria. Quindi le due nuove circostanze introdotte nel problema (l' una di B partito prima di A, l' altra di A diretto incontro a B) trasformeranno l' equazione generale $x = \frac{a + hm}{n - m}$ in quest'

altra $x = \frac{a - h \times - m}{n - (-m)} = \frac{a + hm}{n + m}$.

Si può se piaccia, assicurarsi della giustatezza di questi risultamenti, col risolvere direttamente i due problemi accennati nel presente paragrafo: le equazioni finali riusciranno quelle stesse che abbiamo quì dedotte dalla formola generale modificata secondo la varietà de' casi.

Di fatti, chiamato x come prima il tempo che impiegar deve B per raggiungere A, è evidente che se questi parte ore h più tardi, $x - h$ esprimerà il tempo per cui cammina A prima d'essere raggiunto da B. Laonde, ritenendo che m sia il viaggio che fa A in un' ora, n quello che fa B, avremo $(x - h) \times m$ ed nx l'espressione degli spazj che percorrono A e B, dal momento delle rispettive partenze fino all' istante in cui l' uno raggiunge l' altro. Inoltre, posto che entrambi si muovano alla volta stessa, e che da principio si trovino distanti d' un certo intervallo a, è chiaro che non potrà B raggiunger A, se la via corsa da

B non eguali quella corsa da A, più la distanza a ch' era tra loro. S' avrà dunque pel primo problema l' equazione $nx = a + mx - hm$, o sia $nx - mx = a - hm$, o sia $x = \frac{a - hm}{n - m}$, come poc' anzi.

Rispetto al problema secondo l' espressioni dei tempi saranno, siccome nel precedente x e $x - b$; e saranno pure nx ed $(x - h) \times m$ gli spazj percorsi da B e da A, dal punto delle partenze rispettive fino a quello dell' incontro. Ma poichè A si suppone ora diretto verso B, è manifesto che la somma degli spazj stessi dovrà in questo caso riuscir pari all' intervallo a, per cui eran eglino divisi a principio. L' equazione sarà dunque $nx + (x - h)m = a$, o sia $nx + mx = a + hm$; da cui viene

$$x = \frac{a + hm}{n + m}, \text{ come sopra.}$$

86. Qualche volta si hanno in apparenza altrettante equazioni, qnante sono le incognite, e tuttavia il problema è indeterminato. Ciò avviene quando

alcune condizioni che sembrano differenti, non sono realmente che la medesima, la quale si riproduce sotto un' altra forma. Supponiamo, per esempio, che ci venga proposta questa questione: *trovare due numeri tali che il quarto della loro somma faccia 48, e che la metà più il quarto della loro somma faccia 144?* Chiamando x il primo numero, y il secondo, si avranno queste due equazioni $\frac{x+y}{4}=48$, $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})(x+y)=144$. La prima dà $x=192-y$, e la seconda dà egualmente $x=192-y$. Questi due valori di x sono identici. Per conseguenza la questione non ha realmente che una sola condizione, e non somministra realmente che una sola equazione. Di fatti, con un poco di attenzione, è facile l' accorgersi che dire che il quarto di $(x+y)$ è 48, equivale al dire che la metà più il quarto, o sia i tre quarti di $(x+y)$, sono il triplo di 48, o sia 144. In questa sorta di casi, il calcolo fa conoscere per se stesso, se le condizioni espresse siano real-

mente differenti, o si riducano alla stessa. Imperciochè se esse sono differenti, il calcolo dà equazioni differenti per una stessa incognita; se sono le medesime, dà equazioni identiche per una stessa incognita, come nell' esempio precedente, dove siamo giunti a queste due equazioni identiche, $x = 192 - y$, $x = 192 - y$.

87. Al contrario, le condizioni d' una questione danno qualche volta più equazioni che non si hanno incognite da determinare. Allora perchè la questione sia possibile, e non racchiuda assurdo veruno, fa d' uopo che le quantità cognite abbiano tra loro una relazione tale, che tutte le equazioni possano aver luogo nello stesso tempo. Supponiamo per esempio, che le condizioni d' un problema, espresse algebricamente, ci diano queste tre equazioni: $ax + by = c$, $dx + ey = g$, $hx - my = n$, le quantità a, b, c, d, e, g, h, m, n, essendo cognite, x ed y due incognite.

Le due prime equazioni paragonate insieme, danno $x = \frac{ce - bg}{ae - bd}$, $y = \frac{ag - cd}{ae - bd}$.

La prima e la terza paragonate insieme, danno $x = \frac{mc + bn}{ma + bh}$, $y = \frac{hc - an}{ma + bh}$.

Se adunque le condizioni del problema non racchiudono alcuna incompatibilità, fa d'uopo che i due valori di x siano uguali tra loro, e che siano eguali tra loro i due valori di y, cioè fa d'uopo che siano $\frac{ce - bg}{ae - bd} = \frac{mc + bn}{ma + bh}$, $\frac{ag - cd}{ae - bd} = \frac{hc - an}{ma + bh}$.

Queste due ultime equazioni non esprimono realmente che una sola e medesima condizione; perciocchè, quando dopo avere uguagliati tra loro i due valori di x, si uguagliano in seguito i due valori di y, questa seconda operazione riducesi alla prima, dipendendo i valori di y da quelli di x, e reciprocamente. Di fatti le due equazioni di cui si tratta, si riducono amendue a questa: $hce - bgh - mag = aen - bdn - cdm$, la quale esprime conseguentemente la relazione che devono

avere tra loro le quantità cognite, perchè la questione proposta sia possibile. Se questa equazione non avesse luogo, la questione sarebbe impossibile. Si troverebbe questa medesima equazione di condizione, se nel cercare i valori di x e di y, si paragonasse la prima equazione primitiva colla terza, poi la seconda colla terza, in vece di paragonare successivamente, come si è fatto la prima colle altre due.

88. Vi sono delle questioni le quali non danno più equazioni che incognite, e che tuttavia appartengono a problemi impossibili. Il calcolo fa conoscere questa impossibilità; perciocchè allora nel risultamento numerico, si trova che due numeri differenti dovrebbero essere uguali tra loro; il che è assurdo. Supponiamo per esempio, che un problema conduca a queste due equazioni $2x+3y=20$, $4x+6y=30$: la prima dà $y=\frac{20-2x}{3}$, e la seconda $y=\frac{30-4x}{6}$. Si avrebbe dunque

$\frac{20-2x}{3}=\frac{30-4x}{6}$, ovvero $120-12x$ $=90-12x$, o sia $120=90$: il che è assurdo. Il problema che dà luogo ad un simile risultamento, racchiude dunque delle contraddizioni ne' suoi termini, e non è in conseguenza suscettibile di veruna soluzione.

89. Problema X. *Dato un numero* n *d'incognite* x, y, z, u, ec. *ed* n *equazioni* della forma

$$A\ x+B\ (y+z+u+\ldots)=C$$
$$A'\ y+B'\ (x+z+u+\ldots)=C'$$
$$A''z+B''\ (x+y+u+\ldots)=C''$$
ec.

trovare il valore di ciascuna incognita x, y, z, ec.

Si faccia la somma di tutte le incognite $x+y+z+u+$ ec. $=r$, e le nostre equazioni si cangieranno in

$$A\ x+B\ (r-x)=C$$
$$A'\ y+B'\ (r-y)=C'$$
$$A''z+B''\ (r-z)=C''$$
ec.

mentre $y+z+u+$ ec. $=r-x$, e

così $x + z + u +$ ec. $= r - y$, ec.

Dall' ottenute equazioni possiamo ricavare il valore di ciascuna delle incognite x, y, z, ec. e sarà $x = \frac{C - Br}{A - B}$, $y = \frac{C' - B'r}{A' - B'}$, $z = \frac{C'' - B''r}{A'' - B''}$, ec. in modo che sarà noto il valore di tutte le incognite, subito che si conoscerà quello di r. Ad ottenere il valore di r si sostituiscano i valori trovati di x, y, z, ec. in una dell' equazioni proposte, per esempio nella prima, e si otterrà l'equazione $\frac{A(C - Br)}{A - B} + B\left(\frac{C' - B'r}{A' - B'}, + \frac{C'' - B''r}{A'' - B''} + \text{ec.}\right) = C$ la quale ci darà il valore di r; e trovato questo, se ne dedurranno i valori di tutte le incognite x, y, z, ec.

90. Abbiamo esposto questo problema per far vedere che alcune volte si può di molto semplificare le operazioni, abbenchè si abbiano moltissime incognite, ed altrettante equazioni. Fini-

remo questo capitolo con proporre alcuni problemi che dovranno sciogliersi dai principianti per loro esercizio, dando però i risultamenti di ciascuno, onde possano vedere se le loro soluzioni saranno giuste.

I. Uno mi dice: la metà de' miei scudi col loro terzo, e quarto li supera d' uno. Quanti scudi ho? *Risultamento* 12.

II. Dando 3 soldi per uno a dei poveri, mi mancano 9 soldi; ma dandone 2, me ne avanzan 2. Quanti sono i soldi ed i poveri? *Ris.* I soldi sono 24, ed i poveri 11.

III. Cajo per mantenimento della sua famiglia spende il primo anno scudi 380, il rimanente dell' entrata lo mette a traffico, ed il frutto che ne trae è un quarto della somma messa a traffico; il secondo anno spesi i soliti 380 scudi pone il rimanente a guadagno, e ne ricava pure un quarto; lo stesso in tutto e per tutto gli succede nel terzo anno, passato il quale si accorge che la sua entrata è cresciuta di un sesto. Si vuol sapere quanta fosse nel primo anno l'entrata di Cajo. *Ris.* di scudi 540.

IV. Dividere 7 in due parti, tali che la più grande sorpassi di 3 la più piccola. *Ris.* la più grande 5.

V. Dividere 32 in due parti tali, che divisa la minore per 6, e la più grande per 5, i due quozienti presi insieme facciano 6. *Ris.* Le due parti sono; la minore 12, e la maggiore 20.

VI. Un mulo ed un asino portano alcuni quintali di generi diversi. L'asino si lamenta della sua carica, e dice al mulo; non mi manca che di portare un quintale del tuo carico, per essere più caricato di te del doppio. Il mulo rispose, sì, ma se tu mi dassi un quintale del tuo carico, sarei tre volte più carico di te. Si dimanda quanti quintali portano ciascuno? *Ris.* Il mulo portava quintali $2\frac{3}{5}$, e l'asino portava $2\frac{1}{5}$ di quintale.

VII. Tre persone giuocano insieme; nella prima partita il primo giuocatore perde con ciascuno dei due altri, quanto ciascuno d'essi avea in principio. Nella seconda partita succede lo stesso al secondo giuocatore, e così nella terza partita accade lo stesso al terzo giuocatore. Terminano di giuocare, e si ri-

trova che tutti e tre hanno egual somma, cioè ventiquattro Napoleoni ciascuno. Si dimanda con quanto denaro si sono messi a giuocare? *Ris.* Il primo con Napoleoni 39, il secondo con 21, ed il terzo con 12.

VIII. Tre fratelli hanno comprata una vigna per cento Napoleoni. Il minore dice che egli potrebbe solo acquistarla, se il secondo gli dasse la metà del suo denaro; ed il secondo risponde che se il maggiore gli dasse il terzo del suo denaro, pagherebbe solo la vigna; finalmente dice il maggiore di pagare la vigna con il suo denaro, ed il quarto del minore. Quanto denaro avea ciascuno? *Ris.* Il minore 64 Napoleoni, il secondo 72, ed il maggiore 84.

IX. Un capitano ha tre compagnie; la prima è di Svizzeri, la seconda di Francesi, e la terza d'Italiani. Vuol dare un assalto con una parte di queste truppe, e promette una ricompensa di 901 Napoleoni nel modo seguente.

Che ciascun soldato della compagnia che anderà all'assalto, riceverà un Napoleone, e che il resto del denaro sarà distribuito egualmente alle due altre compagnie.

Si trova che se gli Svizzeri dassero l' assalto, ciascun soldato delle altre compagnie riceverebbe un mezzo Napoleone; e che se fossero i Francesi che dassero l' assalto, ciascuno degli altri riceverebbe $\frac{1}{3}$ di Napoleone; finalmente se fossero gli Italiani che dassero l' assalto, ciascuno degli altri riceverebbe $\frac{1}{4}$ di Napoleone. Si dimanda il numero che era composta ciascuna compagnia? *Ris.* I Svizzeri 265, i Francesi 583, e gli Italiani 689.

CAPITOLO VII.

Della risoluzione de' problemi indeterminati di primo grado.

91. Quando l' enunciato d' una questione contiene più incognite di quello che sieno le condizioni da esprimere, allora dopo aver formate tutte l' equazioni che somministrano queste condizioni, e dopo avere eliminate le incognite finchè è possibile, si giunge ad una equazione finale che conprende almeno due incognite. Queste due in-

cognite non ponno determinarsi che prendendone una arbitrariamente, e poscia ricavando dall' equazione proposta il valore dell' altra. Per esempio sia proposta la questione, *di trovare due numeri di cui la somma aumentata d' una quantità data* m, *sia quadrupla della somma che risulta dall' addizione della loro differenza con un numero dato* n.

È chiaro che chiamando x ed y i due numeri cercati si avrà l'equazione $x+y+m=4(x-y+n)$, o pure $5y=3x+4n-m$, che esprime lo stato della quistione, e comprende due incognite. Fa d' uopo dare un valore ad una delle due quantità x, y, per poter conoscere l' altra. Supponendo pertanto $m=4$, $n=5$, e posto $x=2$,

si troverà $y=4\frac{2}{5}$: ritenuto sempre

m ed n i medesimi, si faccia $x=3$, e si avrà $y=5$; e così dicasi di altre supposizioni. Apparisce che preso indifferentemente per x ed y numeri interi o rotti, positivi o negativi, il problema ammette un'infinità di soluzioni;

ma il numero di queste diminuisce quando si vuole che i numeri x ed y sieno numeri interi positivi. Lo stesso accade per qualunque questione che conduce alla risoluzione d' equazioni indeterminate.

92. Tutte l' equazioni indeterminate di primo grado a due incognite, si ponno rappresentare dalla formola $ax=by+c$, x ed y sono le due incognite; a, b, c, quantità date e conosciute. Di fatti in questa sorta d' equazioni le due incognite sono ciascuna innalzate al primo grado, e non ponno essere moltiplicate fra loro, altrimenti perciò che si è detto nel capo precedente, l' equazione non sarebbe del primo grado; è chiaro che si può rappresentare con una sola lettera a l' unione di tutte le quantità che moltiplicano x, da una sola lettera b l' unione di tutte le quantità che moltiplicano y, ed in fine da una sola lettera c il risultamento di tutti i termini dove le incognite non vi sono. Risulta pure che indifferentemente si può porre in un membro, o in un altro dell' equazione un termine qualunque, purchè si faccia precedere

a questo il rispettivo segno più o meno. Sia per mo d' esempio l' equazione

$mx + \frac{px}{q} + gy + hy = k - 3f$; pongo quest' equazione sotto la seguente forma $\left(m + \frac{p}{q}\right) x = -(h+g)y + k - 3f$,

e sotto quest' aspetto si riconduce alla formola $ax = by + c$, facendo $a = m + \frac{p}{q}$,

$b = -(h+g)$, $c = k - 3f$. Lo stesso si dica dell' equazioni di simil fatta.

93. Problema I. *Determinare in generale le incognite* x *ed* y, *in modo che i loro valori soddisfacciano all' equazione* ax = by + c.

1.° È chiaro che avendosi la scelta di prendere per x ed y numeri qualunque positivi o negativi, interi o rotti si potrà soddisfare alla proposta equazione in infiniti modi; perchè dandosi ad una dell' incognite, per esempio x, una serie qualunque di valori determinati, e sostituendo successivamente questi valori nell' equazio-

ne $ax = by + c$, si avranno equazioni determinate, dalle quali si ricaveranno i valori di y, corrispondenti ciascuno ai valori dati alla x.

2.° Volendosi che i due numeri x ed y fossero positivi, è chiaro che il problema sarebbe impossibile, quando b e c sono numeri positivi, ed a un numero negativo. Ma il problema diventa possibile, quando primamente i numeri a, b, c, sono tutti tre positivi, o tutti tre negativi; mentre per qualunque valore positivo che si dasse ad y, si avrebbe pure per x un valor positivo: secondariamente quando a e b sono positivi, c è negativo; perchè preso per x un numero qualunque positivo, si avrebbe chiaramente per y un numero positivo; in terzo luogo quando a e c sono positivi, e b negativo, allora basta dare ad x un valor positivo tale che $c - ax$ sia un numero positivo.

94. Problema II. *Soddisfare all' equazione* $\mathrm{r} = \mathrm{hu} + \mathrm{k}$, *nella quale i numeri* h *e* k *sono interi, in modo che* u *ed* r *sieno numeri interi e positivi.*

1.° Il problema è impossibile quando h e k sono numeri negativi.

2.° Se h e k sono positivi, allora posto $u=0$, $u=1$, $u=2$, $u=3$, ec. si avrà per r tanti valori che saranno numeri interi e positivi, siccome vuole l'ennunciato del problema.

3.° Se uno dei due numeri h e k è positivo, e l'altro negativo, bisognerà che sieno tali che supponendo $u=$ ad un numero intero positivo n, la quantità $nh+k$ formi un risultamento positivo.

95. Problema III. *Si cercano due numeri interi e positivi tali, che sottrando da uno il triplo dell' altro, la differenza sia* 10?

Indicando questi due numeri per x ed y, avremo $x-3y=10$, e $x=3y+10$, equazione che è della forma notata nel precedente problema, ed appartiene al caso 2.° Di fatti posto $y=0$, $y=1$, $y=2$, ec. avremo per x i valori 10, 13, 16, ec. fino all' infinito; e perciò i numeri che soddisfanno alla questione sono infiniti.

Se si fosse in vece proposto di trovare due numeri tali, che il triplo di uno sommato con l' altro, l' aggregato fosse 10: allora l' equazione sarebbe

stata $x+3y=10$, e $x=-3y+10$ che appartiene al caso 3.° Fatto $y=0$, $y=1$, $y=2$, $y=3$, $y=4$, ec., avremo per x i valori 10, 7, 4, 1, -2; l' ultimo valore non soddisfa alla dimanda, onde le soluzioni si riducano a quattro.

96. Problema IV. *Soddisfare all' equazione* $y=\frac{hx}{g}+k$, *nella quale* g, h, k, *sono numeri interi*, *e la frazione* $\frac{h}{g}$ *è ridotta ai minimi termini; in modo che* y, *ed* x *sieno numeri interi positivi*.

1.° Il problema è impossibile quando k e la frazione $\frac{h}{g}$ sono nello stesso tempo numeri negativi.

2.° Se k e la frazione $\frac{h}{g}$ sono numeri positivi, è chiaro che supposto succesivamente $x=0$, $x=g$, $x=2g$, $x=3g$, ec. si avranno per y numeri interi e positivi.

3.° Se k e la frazione $\frac{h}{g}$ hanno segni diversi, bisognerà che supponendo $u=ng$ (essendo n numero intero), il valore della quantità $nh+k$, che sarà evidentemente numero intero, sia ancora positivo.

97. Problema V. *Trovare un numero intero tale, che diviso per 53 dia per resto 47; e diviso per 15 dia 2 per resto.*

Chiamando t il numero cercato, x il primo quoziente, y il secondo, e considerando che in qualunque divisione il dividendo è eguale al prodotto del divisore per il quoziente, più il resto, si avranno le due equazioni $t=53x+47$, $t=15y+2$; e perciò $53x+47=15y+2$: da quest' equazione si ricava. . . . . .

$$y=\frac{53x+45}{15}=\frac{53x}{15}+3,$$ che si riporta al caso 2.° del problema generale. Dunque supponendo $x=0$, si avrà $y=3$, e $t=47$: questo è il più piccolo intero che soddisfi alle condizioni del problema. Se si fa $x=15$, si tro-

verà $t = 842$, numero che diviso per 53 dà 47 di resto, e diviso per 15 dà 2 di resto. Se si facesse $x = 2 \times 15$, si troverebbe $t = 1637$, numero che pure soddisfa alle condizioni del problema.

98. Problema VI. *Trovare due numeri interi e positivi, che soddisfacciano all' equazione* $217 - 3x = 31y$.

Quest' equazione somministra . . . .

$$y = \frac{217 - 3x}{31} = 7 - \frac{3x}{31},$$ che appartiene al caso 3.° del problema generale. Dunque supposto $x = 0$, si avrà $y = 7$; e se $x = 31$, sarà $y = 4$; se si farà $x = 2 \times 31$, si avrà $y = 7 - 6 = 1$. Non vi sono altre soluzioni possibili siccome richiede il quesito; perchè se si facesse $x = 3 \times 31$, si avrebbe $y = -2$, numero negativo, e perciò contrario alla dimanda.

99. Problema VII. *Soddisfare all' equazione* $ay = bx + p$, *nella quale* a, b, p, *sono numeri interi positivi, e che non hanno divisor comune, prendendo per* x, y, *dei numeri interi e positivi possibili.*

Osservo che i numeri a, b debbono essere primi tra loro, affinchè x ed y possano essere numeri interi; perchè se a e b avessero un divisor comune k, in modo che fosse $b = kh$, $a = ki$ (k, h, i, sono numeri interi), si avrebbe $kiy = khx + p$, o $iy = hx + \frac{p}{k}$. Ora poichè i tre numeri a, b, p non hanno divisor comune, k non dividerà p; dunque $\frac{p}{k}$ sarà una frazione, la quale riunita con i termini interi, formerà un risultamento che non sarà numero intero, e perciò non sarà eguale al primo membro iy, che è un numero intero.

100. Per risolvere generalmente l'equazione $y = \frac{bx + p}{a}$, si rammenti ciò che abbiamo detto, che quando $b = 1$, il problema non ha alcuna difficoltà; e si osservi che i valori interi di x che rendono intera la quantità $\frac{bx + p}{a}$, ren-

dono altresì intiero il prodotto $\frac{bx+p}{a} . N$; e viceversa i valori intieri di x, che rendono intiera questa seconda quantità, renderanno intiera anche la prima, ben inteso che N sia numero intero. Profittando di questa proprietà scieglia-mo tra' moltiplicatori N quello per cui risulti $\frac{bx+p}{a} . N = Px + Q \frac{\pm x+q}{a}$.

Acciocchè questo succeda, si vede tosto che la divisione $\frac{bN}{a}$ deve dare un resto ± 1. Sia dunque M il quoto intiero della divisione, e sia $\frac{bN}{a} = M - \frac{1}{a}$.

Abbiamo di qui per determinare N l' equazione parimente indeterminata $N = \frac{aM-1}{b}$. Ma a essendo maggiore di b, se facciamo $= a'$ il resto della divisione $\frac{a}{b}$, ed $= h$ il quoto intero,

l'equazione si semplifica, e diviene $N = hM + \frac{a'M - 1}{b}$. Qualunque valor intiero dell' incognita M, che renda intiera la quantità $\frac{a'M - 1}{b}$ darà un valor intero di N quale si cercava. Questo valore di M presto si trova se il residuo $a' = 1$, anzi se ne avranno quanti si vogliono, e saranno compresi nell' espression generale $M = bE + 1$, essendo E numero intero, e positivo qualunque. Assumendo $E = 0$, si ha $M = 1$; questo valore posto in quello di N ci dà $N = \frac{a - 1}{b}$.

101. Se a' non è $= 1$, si tratterà la quantità $\frac{a'M - 1}{b}$ alla maniera di $\frac{bx + p}{a}$. Preso un nuovo moltiplicatore N', si stabilirà che debba essere $\frac{a'N'}{b} = M' + \frac{1}{b}$, essendo M' il quoto

intiero della divisione $\frac{a'N'}{b}$. Abbiamo

quì supposto il resto $= + 1$, piuttosto che $= - 1$ per un' alternazione che sarà comoda in seguito.

Sarà pertanto $\frac{a'M-1}{b}$. $N=E'=$ intero, $N'=\frac{bM'+1}{a'}$; e chiamato h' il quoto intiero della divisione $\frac{bM'}{a'}$, b' il resto della divisione $\frac{b}{a'}$, sarà $N'=h' + \frac{bM'+1}{a'}$. Trovato il valor di M', che rende intiero $\frac{bM'+1}{a'}$, avremo il valor intero di N'. Questo portato nell' equazione $\frac{a'M-1}{b}$. $N'=E'=$intero, ci dà l'adequazione $\frac{M-N'}{b}=E'$, dal-

la quale basta il valore $M = N'$. Sostituito questo valore in $N = \frac{aM - 1}{b}$, ci dà un moltiplicator idoneo $N = \frac{aN' - 1}{b}$, che sarà intero. Se l' ultimo resto $b' = 1$, si può prenderè $M' = a' - 1$, con che viene perciò che abbiamo detto $N' = \frac{b(a'-1)+1}{a'}$, onde $N = \ldots$

$$\frac{a[b(a'-1)+1]-a'}{ba'} = a - \frac{ab - a + a'}{ba'},$$

o più semplicemente $N = \frac{a(b-1)+a'}{ba'}$, moltiplicatore egualmente idoneo, poichè la quantità $\frac{bx+p}{a}$. N diviene

$$\frac{[ab(b-1)+a'b]x}{aba'} + \frac{p[a(b-1)+a]}{aba'} =$$

$$\frac{b[a(b-1)+a']x + p[a(b-1)+a']}{aa'b} = \text{(per}$$

essere $\frac{a(b-1)+a'}{ba'} =$ intero, $\frac{b-1}{a'} =$ in-

tero) intero $+ \frac{ba'x+p[a(b-1)+a']}{aa'b} =$

$$\frac{x+p\left[\frac{a(b-1)+a'}{b-a'}\right]}{a}.$$

102. Quando non fosse $b'=1$, si proseguirebbe l'operazione con una nuova adequazione $\frac{b' M'+1}{a'}$. $N'=E$, prendendo $N'=\frac{a' M''-1}{b'}=$ intero $+\frac{a'' M''-1}{b'}$, dove M'' è il quoto intiero della divisione $\frac{b' N''}{a'}$, e a'' è il residuo della divisione $\frac{a'}{b'}$.

103. Se $a''=1$ l'operazione sarà terminata, e si troverà $M''=1$ $N''=\frac{a'-1}{b'}$, quindi proseguendo a rimontare $\frac{b'(a'-1)M'+a'-1}{a'b'}=$ intero $=$

$\dfrac{-M' + \frac{a'-1}{b'}}{a'}$, e $M' = \dfrac{a'-1}{b'}$, $N' =$

$\dfrac{b\left(\frac{a'-1}{b'}\right)+1}{a'} = \dfrac{b(a'-1)+b'}{a'b'}$. Perciò $\dfrac{a'M-1}{b}$. $N=$ intero, diviene per essere intero $\dfrac{a'-1}{b'}$. $\dfrac{M-N'}{b} =$ intero, e ci dà $M = N' = \dfrac{b(a-1)+b'}{a'b'}$:

Sostituito questo valore di sopra, risulta $N = \dfrac{aM-1}{b} = \ldots\ldots\ldots$:

$\dfrac{a[b(a'-1)+b']-a'b'}{ba'b'}$.

104. Ravviciniamo questi varj casi, ed i corrispondenti risultamenti. Si svolga la frazione $\dfrac{b}{a}$ in frazion continua sino al primo resto, sino al se-

condo, al terzo, al quarto, ec. senza badare agli interi, e si rammenti ciò che per N, N', N'', ec. M', M', M'', ec., a', a'', a''', ec. b', b'', b''', ec., si esprimeva poc'anzi. Si avrà la tavola qui annessa.

105. Se si prosegue lo sviluppo della frazione, e la formazione dei risultamenti corrispondenti ai nuovi resti $a''', b''', a^{\text{IV}}, b^{\text{IV}}$, ec. e se continuasi a dare ai valori di N la forma opportuna, si arriva finalmente all' espressione generale di N per ciascuno dei due casi, in cui sia $a^m = 1$, oppure $b^m = 1$ (indicando n, ed m degli apici, e non delle potenze. Pel primo caso si ha

$$(A)\ N = \frac{\left\{\begin{matrix} a^{n-2}b^{n-3} \ldots b^{n-n}a^{n-n}\left[b^{n-2}(a^{n-1}-1)+b^{n-1}\right]- \\ a^{n-1}b^{n-1}(a^{n-3}b^{n-3} \ldots ab - b^{n-2}a^{n-3} \ldots ba + \\ a^{n-2}b^{n-2}(a^{n-4}b^{n-4} \ldots ab - b^{n-3}a^{n-4} \ldots ba + \\ a^{n-3}b^{n-3}(a^{n-5}b^{n-5} \ldots ab - b^{n-4}a^{n-5} \ldots ba + 1 \\ \text{ec.})\,] \end{matrix}\right\}}{ba'b'a''b'' \ldots a^{n-1}b^{n-1}}$$

Pel secondo caso, cioè per $b^m = 1$, il valor del moltiplicatore si trova

$$\text{B)}\ N = \frac{\left\{\begin{array}{l} ab \ldots a^{m-2} b^{m-2}\left[a^{m-1}(b^{m-1}-1)+a^{m}\right] - b^{m-1} a^{m}\Big[ab \\ \ldots\ldots a^{m-4} b^{m-3} a^{m-2} - a^{m-1}\, b^{m-3} a^{m-3} \ldots ba + \\ b^{m-2} a^{m-1}\left[ab \ldots a^{m-3} - a^{m-2}\, b^{m-4} a^{m-4} \ldots ba + \right. \\ b^{m-3} a^{m-2}\left(ab \ldots a^{m-4} - a^{m-3}\, b^{m-5} a^{m-5} \ldots ba + \right. \\ \text{ec.} \ldots\ldots b' a'' (a-a') \Big] \end{array}\right.}{ba' b' a'' b'' \ldots b^{m-1} a^{m}}$$

106. Sapendo far uso di queste formole non si ha in ciascun caso particolare che a formar la tavola dei precedenti sviluppi della frazione $\frac{b}{a}$, che si suppone ridotta ai minimi termini, tener a conto i resti a', a'', a''', ec. b', b'', b''', ec., e sostituirli. Quando il resto 1 si trova tra' valori di a', a'', ec., si adoprerà la formola (A), e si adoprerà la (B), quando un tal resto sarà tra' valori di b', b', b'', ec.

107. Le teorie esposte per la generale soluzione dell'equazione $y = \frac{bx+p}{a}$ sono cavate da una memoria del pr. Magistrini stampata l'anno 1803 in Pavia, e che merita tutta l'attenzione

degli Analisti per la chiarezza e perfezione che l'illustre Autore ha portata in un ramo d'analisi indeterminata di cotanto rilievo. (*a*)

(*a*) Stimo bene di far qui in parte conoscere l'artificio che il Signor Eulero adopra per isciogliere l'equazione $y = \frac{bx+p}{a}$; ma siccome mi partirei dall'assunto prefissomi, cioè d'essere conciso più che sia possibile, così mi limiterò a risolvere la detta equazione in un caso particolare, che credo potrà bastare per avere un idea del metodo del celeb. Autore. Sia la stessa equazione del Problema VIII. $y = \frac{56x+11}{39} = x + \frac{17x+11}{39}$; Poste $\frac{17x+11}{39} = u$, avremo $x = \frac{39u-11}{17} = 2u + \frac{5u-11}{17}$; fatto $\frac{5u-11}{17} = z$, sarà $u = \frac{17z+11}{5} = 3z+2+\frac{2z+1}{5}$. Ponghiamo $\frac{2z+1}{5} = t$, si avrà $z = \frac{5t-1}{2} = 2t + \frac{t-1}{2}$; ed in fine ponendo $\frac{t-1}{2} = p$, si ricaverà $t = 2p+1$. Ritornando indietro, e sostituendo, sarà $z = 5p+2$, $u = 17p+9$, $x = 39p+20$, e $y = 56p+29$, equazione che si riporta al secondo problema, facendo rispettivamente $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, ec.

108. PROBLEMA VIII. *Risolvere l'equazione* $39y - 56x = 11$ *in numeri intieri, e positivi.*

Sara $y = \frac{56x + 11}{39} = x + \frac{17x + 11}{39}$,

e $b = 17, p = 11, a = 39$; $\frac{bx + p}{a}$. $N = E =$ intero. Si avrà . . . .

$$\frac{b}{a} = \frac{17}{39} = \frac{1}{. + \frac{a'}{b}} = \frac{1}{. + \frac{5}{17}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{17}{39} = \frac{1}{. + \frac{1}{. + \frac{b'}{a'}}} = \frac{1}{. + \frac{1}{. + \frac{2}{5}}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{17}{39} = \frac{1}{. + \frac{1}{. + \frac{1}{. + \frac{a''}{b'}}}} = \frac{1}{. + \frac{1}{. + \frac{1}{. + \frac{1}{2}}}}$$

quindi $a' = 5$, $b' = 2$, $a'' = 1$. Dunque nella forma generale $a^n = a''$, e

perciò $N = \frac{a[b(a' - 1) + b'] - a'b'}{ba'b'} =$

$$\frac{39[17(5 - 1) + 2] - 5 \cdot 2}{17 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{272}{17} = 16.$$

Dunque $\frac{bx+p}{a} \cdot N = \frac{17x+11}{39} \cdot 16 =$

$$\frac{272x + 11 \cdot 16}{39} = 7x + 7 - \frac{x-20}{39}.$$

Quindi $\frac{x-20}{39} = E$, e $x = 39E + 20$, equazione trattata nel secondo problema

La ragione per cui nella formola si è preso solamente il primo termine a^{n-2} pel primo fattore del primo prodotto del numeratore, è chiara dalla stessa disposizione, la quale indica, che b deve portar un apice di meno di a: altronde sono esclusi gli apici negativi. Nel secondo prodotto poi dello stesso numeratore l'esclusione del suo secondo fattore non annulla il primo, e tien luogo se piace dell' unità. Così nel denominatore il dover essere $n-1$ il massimo numero degl' indici di a, e di b esclude a'', b'', a''', b''', ec. pel caso di $a''=1$.

169 Problema IX. *Risolvere l'equazione* $41y - 29x = 10$, *in numeri interi, e positivi*.

Avremo $y = \frac{29x+10}{41}$, e sarà $\frac{b}{a} =$

$$\frac{29}{41} = \frac{1}{\cdot+\frac{12}{29}},\ \frac{b}{a} = \frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{b'}{a'}}} = \frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{5}{12}}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{a''}{b'}}}} = \frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{2}{5}}}}\ \frac{b}{a} = \frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{b''}{a''}}}}} =$$

$$\frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{1}{\cdot+\frac{1}{2}}}}}$$

cioè $b = 29$, $a = 41$, $b' = 5$, $a' = 12$, $a'' = 2$. $b'' = 1$, $m = 2$, $N = \ldots$

$$\frac{ab\,[a'(b'-1)+a'']-b'a''(a-a')}{ba'b'a''} =$$

$$\frac{29.41\,[12(5-1)+2]-5.2(41-12)}{29.12.5.2} =$$

$\frac{41.5-1}{12} = 17$; quindi $y = \frac{29.17x+10.17}{41} =$ $8x+4+\frac{x+6}{41}$, e posto $\frac{x+6}{41} = E$, avremo $x = 41\,E - 6$, equazione che

si risolve, come nel problema secondo.

Si vede che nel far uso della formola (B) sarebbe facile sbagliare, se non si avvertisse, che l'ultimo termine del secondo fattore nel secondo prodotto del numeratore debb'essere sempre $b'a''(a-a')$ in tutti i casi, escluso quello di $b'=1$, in cui il secondo termine del numeratore non è che a'.

110. Finiremo questo capitolo con esporre i soliti problemi per esercizio dei giovani studiosi.

I.° Dividere 100 in due parti tali, che una sia divisibile per 7, e l'altra per 11? *Ris* $x=8$, e $y=4$.

II.° Due contadine hanno insieme 100 ova; la prima dice alla seconda, quando conto le mie ova per 8, avvi un resto di 7; e la seconda risponde, che quando essa conta le sue per decina, trova lo stesso avanzo. Si dimanda il numero dell'ova di ciascuna contadina? *Ris.* $x=7$, e $y=3$, ec.

III.° Uomini e donne in un albergo hanno speso 1000 soldi. Gli uomini hanno pagato ciascuno 19 soldi, e le donne 13. Si cerca il numero degli uomini, e quello delle donne? *Ris.* $x=2$, $y=74$, ec.

IV.° Un Mercante compra nello stesso tempo Cavalli e Buoi per la somma di 1770 scudi; paga ciascun cavallo 31 scudi, e ciascun bue 21 scudi. Si dimanda il numero dei cavalli, e buoi comprati? *Ris.* $x = 9$, e $y = 71$, ec.

V.° Si cerca un numero che essendo diviso per 11, dia 3 per residuo; e che essendo diviso per 19, dia il residuo 5? *Ris.* Il più piccolo numero che soddisfa alla dimanda è 157.

VI.° Tizio compra 100 capi di bestiame, cioè dei porci, capretti, e pecore per scudi 100; i porci costano scudi $3\frac{1}{2}$ l' uno; i capretti $1\frac{1}{3}$; e le pecore $\frac{1}{2}$ scudo: quanti animali comprò d' ogni specie? *Ris.* $x = 5$, $y = 42$, $z = 53$, ec.

VII.° Un Orefice ha tre qualità d'argento; la prima qualità è 7 oncie per marco, la seconda $5\frac{1}{2}$, e la terza $4\frac{1}{2}$; deve fare una lega di 30 marchi, che ciascun marco pesi 6 oncie; quanti marchi dovrà prendere di ciascuna qualità? *Ris.* $x = 12$, $y = 15$, $z = 3$, ec.

CAPITOLO VIII.

Teoria generale delle Proporzioni e Progresioni aritmetiche e geometriche.

111. Si chiama *rapporto* o *ragione* il confronto di due grandezze, che sono necessariamente sempre della medesima specie, per poter essere paragonate tra loro.

Se nel paragonare due grandezze, si considera di quanto una supera l'altra, o è superata dall'altra, questa *differenza* si chiama *rapporto aritmetico*, *ragione aritmetica*. Per esempio, il rapporto aritmetico di 12 piedi a 7 piedi e 5 piedi, eccesso di 12 piedi sopra 7 piedi: quello de' numeri astratti 12 e 7 è il numero astratto 5. Si vede che il rapporto aritmetico di due grandezze è sempre della medesima specie di cui sono esse.

112. Ma se nel paragonare due grandezze, si considera quante volte l una contiene l'altra, o è contenuta nell' altra, questo *numero di volte* si chiame *rapporto geometrico*, *ragione geometri-*

ca. Per esempio, il rapporto geometrico di 12 piedi a 4 piedi è 3, quoto di 12 piedi diviso per 4 piedi È chiaro che il rapporto geometrico può essere considerato come una frazione, la quale abbia per numeratore uno de' due numeri paragonati, e per denominatore l'altro. Questo rapporto è sempre un numero astratto.

113. Le due grandezze che formano un rapporto, sia aritmetico sia geometrico, si chiamano i *termini* di questo rapporto. Quello che si pronunzia o che si scrive il primo, si chiama *antecedente*, e l'altro si chiama *conseguente*. Quindi se si paragona aritmeticamente o geometricamente 18 con 6, il termine 18 è l'antecedente, ed il termine 6 il conseguente.

114. Il confronto di due rapporti eguali, forma una *proporzione*, che è *aritmetica* o *geometrica*, secondo che i due rapporti sono aritmetici o geometrici. Per esempio, il rapporto aritmetico di 12 a 7 essendo eguale a quello di 9 a 4, i quattro numeri 12, 7, 9, 4, formano una proporzione aritmetica che si scrive così 12 . 7 : 9 . 4, e si pro-

nuncia 12 a 7 come 9 a 4. Il rapporto geometrico di 12 a 4 essendo eguale a quello di 15 a 5, i quattro numeri 12, 4, 15, 5 formano una proporzione geometrica, che si scrive così 12:4::15:5, o pure 12:4=15:5, e si pronuncia 12 a 4 come 15 a 5. (*a*)

115. Nell' una e nell' altra sorte di proporzioni, il primo e terzo termine si chiamano gli *antecedenti*, il secondo, e quarto si chiamano i *conseguenti*; il primo e quarto termine si chiamano gli *estremi*, il secondo e terzo si chiamano i *medj*.

116. Si chiama *progressione aritmetica*, una serie di termini, ciascuno de' quali è superato di tanto da quello che lo segue, di quanto esso supera il termine precedente, o viceversa: tali sono que'

(*a*) Poichè ogni *proporzione* risulta da due *rapporti eguali*, ne segue che una *proporzione* qualunque non è che una *equazione* propriamente detta, espressa per via di segni diversi. Di fatti si vede tosto che coincidono a pieno, quanto al significato, e la *proporzione aritmetica* a. b: c. d colla *equazione* $a - b = c - d$, e l'*equazione* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ colla *proporzion geometrica* a : b :: c : d.

della serie ascendente 3, 5, 7, 9, 11; la cui differenza *additiva*, da un termine all' altro, è 2; e la serie discendente 31, 28, 25, 22, 19, la cui differenza *sottrattiva*, da un termine all' altro, è 3. In generale, se le quantità f, g, h, i, k, formano una progressione aritmetica, crescente o decrescente, essa si scrive così $\div f . g . h . i . k$, e si pronuncia f a g come g ad h come h ad i come i a k.

117. Una serie, ciascun termine della quale è contenuto tante volte in quello che lo segue, quante volte questo contiene il termine successivo, o viceversa, si chiama una *progressione geometrica:* tale è la serie ascendente 2, 4, 8, 16, 32, ciascun termine della quale è contenuto *due volte* nel seguente; e la serie discendente 324, 108, 36, 12, 4, ciascun termine della quale contiene *tre volte* il seguente. In generale, se le quantità f, g, h, i, k, formano una progressione geometrica, crescente o decrescente, essa si scrive così ∺ $f : g : h : i : k$, e si pronuncia: f a g come g ad h come h ad i come i a k.

118. Quando si dice semplicemente che una serie è una proporzione o una progressione, s' intende sempre di parlare della proporzione o della progressione geometrica, a meno che il discorso non riguardi la proporzione o progressione aritmetica.

SEZIONE I.

Delle Proporzioni e Progressioni aritmetiche.

119 *In ogni proporzione aritmetica* m. n : p. q, *la somma* m + q *degli estremi è uguale alla somma* n + p *de' medj.*

Imperciocchè chiamando d la differenza additiva o sottrattiva della proporzione, si ha $n = m + d$, $q = p + d$; conseguentemente la proporzione può essere scritta così, $m . m + d : p . p + d$; e ben si vede, prendendo la somma degli estremi e quella de' medj, che queste due somme son composte di parti identiche.

Ne' numeri, se si ha 3. 5 : 7. 9, si avrà $3 + 9 = 5 + 7$.

Può accadere che uno de' termini della proporzione sia zero; ed allora una delle due somme che sono sempre uguali, si riduce ad un solo estremo o ad un solo medio.

120. Se la proporzione è *continua*, cioè, se i due medj sono eguali, o che sia $m . n : n . p$, la somma degli estremi sarà doppia d'uno de' medj. In numeri, se si ha $3 . 5 : 5 . 7$, si avrà $3 + 7 = 5 + 5$.

Per abbreviare, in vece di scrivere la proporzione continua nel modo usato $m . n : n . p$, si scrive così $\div m . n . p$.

121. *Reciprocamente, se quattro termini* m, n, p, q *sono tali che la somma* m + q *degli estremi sia eguale alla somma* n + p *de' medj, questi quattro termini formano una proporzione aritmetica.*

Imperciocchè essendo $m + q = n + p$, si avrà $m - n = p - q$; che equivale alla proporzione $m . n : p . q$.

122. Segue da questi principj che, se in una proporzione aritmetica qualunque, sono noti tre termini, si potrà trovare quello che manca: perciocchè, se sono noti i due medj ed un estre-

mo, si avrà l'estremo incognito, col sottrarre dalla somma de' medj l'estremo cognito; se sono noti due estremi ed un medio, si avrà il medio incognito, col sottrarre dalla somma degli estremi il medio cognito.

123. *In ogni progressione aritmetica* $\div$ f. g. h. i. k. l, *un termine qualunque è uguale ad un altro, più la differenza additiva o sottrattiva della progressione, ripetuta tante volte quanti sono i termini dal primo inclusivamente sino all' altro esclusivamente.*

Imperciocchè sia d la differenza positiva o negativa della progressione: si ha $g = f + d$, $h = g + d = f + 2d$, $i = h + d = f + 3d$, ec. Conseguentemente la progressione può essere scritta così $\div f. f + d. f + 2d. f + 3d. f + 4d. f + 5d. f + 6d$: ove si vede, per esempio, che il quinto termine è uguale al primo, più quattro volte la differenza; che il settimo termine è uguale al secondo, più cinque volte la differenza, ec.

124 Dunque se si conosce un termine e la differenza, si potrà determinare un termine di cui è noto il luo-

go, senza essere obbligato di calcolare gli altri. Per esempio, se si conosce il primo termine e la differenza, si avrà il centesimo termine, aggiungendo al primo 99 volte la differenza.

125. Dunque se in una progressione aritmetica si prendono quattro termini, tali che ve ne siano tanti fra il primo ed il secondo, quanti ne sono fra il terzo ed il quarto, questi quattro termini formeranno una proporzione aritmetica; poichè la differenza de' due primi e quella de' due ultimi conterranno la differenza della progressione, ripetuta lo stesso numero di volte, e saranno per conseguenza eguali. E siccome in ogni proporzione aritmetica, la somma degli estremi è uguale a quella de' medj, ne segue che la somma degli estremi di quattro termini, presi a due a due ad eguali intervalli, in una progressione aritmetica, è uguale alla somma de' medj.

126 Il medesimo Teorema somministra il modo d' inserire fra due termini dati un numero qualunque di medj proporzionali aritmetici. Siano per esempio i due numeri 3 e 120, fra i

quali si vogliano inserire 12 medj proporzionali aritmetici. Si vede che la questione è di formare una progressione aritmetica, di cui 3 e 120 sono gli estremi, e che abbia in tutto 14 termini. Ora l'ultimo 120 è uguale al primo, più 13 volte la differenza. Dunque, se da 120 sottraggo 3, e divido il residuo 117 per 13, il quoto 9 sarà la differenza della progressione. Avendo il primo termine e la differenza, si può determinare in particolare ciascuno de' termini della progressione.

127. Se fra tutti i termini d'una progressione aritmetica, si inserisce un medesimo numero qualunque di medj proporzionali aritmetici, la nuova serie che si formerà, sarà ancora una progressione aritmetica. Imperciocchè, se per esempio, s'inseriscono quattro medj proporzionali aritmetici fra i termini della progressione aritmetica $\div f.g.h\ i.k\ l$; si vedrà per l'articolo precedente, che (essendo d la differenza tra f e g) la prima progressione parziale, cioè quella di f a g, ha per differenza particolare $\frac{d}{5}$; che la seconda progressione

parziale, o sia quelle di g ad h, ha parimente per differenza $\frac{d}{5}$; e così di seguito. Dunque regna la medesima differenza in tutte le progressioni parziali; dunque, poichè dall'una all'altra vi è un termine comune, si potranno mettere tutte di seguito, ed esse non formeranno più che una sola e medesima progressione.

128. *La somma di tutti i termini d'una progressione aritmetica qualunque è uguale alla metà della somma degli estremi, moltiplicata pel numero de' termini, o ciò che è lo stesso, alla somma degli estremi, moltiplicata per la metà del numero de' termini.*

Imperciocchè il numero de' termini della progressione è pari o dispari. Ora, 1.° quando il numero de' termini della progressione è pari, se si prendono due termini ad eguali distanze dagli estremi, questi due termini e gli estremi della progressione formeranno una proporzione aritmetica. Dunque, in vece de' due termini presi ad uguale distanze dagli estremi, si

può prendere la somma degli estremi. Quindi la progressione aritmetica è equivalente ad una serie d' un pari numero di termini che fossero eguali ciascuno alla metà della somma degli estremi. Ora egli è evidente che la somma di quest' ultima serie è uguale al prodotto d' uno de' suoi termini pel loro numero. Dunque la somma della progressione aritmetica è uguale alla metà della somma degli estremi, moltiplicata pel numero de' termini, o sia alla somma degli estremi, moltiplicata per la metà del numero de' termini.

2.° Quando il numero de' termini dalla progressione è dispari, il termine di mezzo forma cogli estremi, una proporzione continua, di modo che (120) questo termine è la metà della somma degli estremi. E siccome da un altro canto, due termini presi a distanze qualunque, ma eguali dagli estremi; formano sempre, con questi due ultimi, una proporzione aritmetica; ne segue che in questo caso, come nel primo, la progressione aritmetica è equivalente ad una serie d' uno stesso numero di termini, eguali ciascuno alla

metà della somma degli estremi di questa progressione. Si ha dunque sempre la medesima conclusione.

129. *Conoscendo in una progressione aritmetica, tre di queste cinque cose, il primo termine, l' ultimo, la differenza, il numero de' termini, la somma di tutti i termini: trovare le due altre?*

Chiamiamo il primo termine . . a,
l' ultimo . . . . u,
la differenza additiva o sottrattiva . . d,
il numero de' termini . . . . . . n,
la somma de' termini . . . . . . s,
si avranno le due equazioni (123 e 128):

$$\text{(A)}\ u=a+d(n-1);\ \text{(B)}\ s=(a-u)\times\frac{n}{2}.$$

Ora, se fra le cinque quantità a, u, d, n, s, che esse racchiudono, ne sono note tre, si tratta di trovare le altre due, il che dà luogo alla seguente

Tavola per le progressioni aritmetiche

Dato	Si ha	Formule
d, n, u		$a = u - d(n-1)$
d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$
d, u, s	a	$a = \frac{1}{2} d \pm \sqrt{\left(\left(u + \frac{d}{2}\right)^2 - 2ds\right)}$
n, u, s		$a = \frac{2s}{n} - u$
a, n, u		$d = \frac{u-a}{n-1}$
a, n, s	d	$d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}$
a, u, s		$d = \frac{uu - aa}{2s - a - u}$
n, u, s		$d = \frac{2(un - s)}{n(n-1)}$
a, d, u		$n = 1 + \frac{u-a}{d}$
a, u, s		$n = \frac{2s}{a+u}$
a, d, s	n	$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left(\frac{a}{d} - \frac{1}{2}\right)^2\right)}$
d, u, s		$n = \frac{1}{2} + \frac{u}{d} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{u}{d} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right)}$

Dati	Si ha	Formule
a, d, n		$u = a + d(n-1)$
a, n, s		$u = \frac{2s}{n} - a$
a, d, s	u	$u = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2\right)}$
d, n, s		$u = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2}$
a, n, u		$s = \frac{n}{2}(a+u)$
a, d, n		$s = n\left(a + d\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$
a, d, u	s	$s = \left(\frac{u+a}{2}\right)\left(1 + \frac{u-a}{d}\right)$
d, n, u		$s = n\left(u - d\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$

I nostri Lettori potranno esercitarsi a fare delle applicazioni numeriche di queste formole. A noi basterà darne un breve saggio nel seguente problema.

Una nave postasi alla vela, fece 6 *leghe nel primo giorno,* 13 *nel secondo,* 20 *nel terzo, e così di mano in mano sempre in progressione aritmetica, fino all' ultimo giorno di cammino, in*

cui si sa che fece lo spazio di leghe 132: si cerca quanti giorni abbia durato il viaggio, e qual fosse la distanza trà il punto della partenza, e quello della fermata?

Le quantità cognite sono in questo caso, il primo termine $a=6$, l' ultimo $u=132$, e la differenza $d=7$: le due che restano a determinarsi, sono n, numero de' giorni, o sia de' termini della progressione, ed s, somma di tutti i termini, o sia degli spazj trascorsi durante il viaggio. Converrà dunque ricorrere all' equazioni $n=\frac{u-a+d}{d}$, $s=\frac{(a+u).(u-a+d)}{2d}$; le quali, sostituiti alle lettere i numeri corrispondenti, daranno $n=\frac{132-6+7}{7}=19$, ed $s=\frac{(6+132).(132-6+7)}{2.7}=1311$.

Questi risultamenti mostrano che la nave ha camminato 19 giorni, e che la totalità del suo corso monta a 1311 leghe.

SEZIONE II.

Delle Proporzioni e Progressioni geometriche.

130. Parecchi fra i teoremi relativi alle proporzioni aritmetiche, e dimostrati nella Sezion precedente, possono trasportarsi alle proporzioni geometriche, col semplice sostituire ne' casi analoghi il prodotto di due termini alla somma loro e il quoto alla differenza. Questo rapporto tra le due specie di proporzione apparirà chiaramente dagli articoli che seguono.

131. *In ogni proporzione geometrica* a : b :: c : d, *il prodotto* a d *degli estremi è uguale al prodotto* b c *de' medj*.

Imperciocchè sia $\frac{1}{r}$ la ragione della proporzione, o sia il quoto d' un antecedente diviso pel suo conseguente: si avrà $\frac{1}{r} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; e quindi $b = ar$, $d = cr$. Dunque la proporzione può essere scritta così, $a : ar :: c : cr$; ed

allora si vede che il prodotto degli estremi e quello de' medj sono composti di fattori identici.

In numeri, se si ha $2 : 8 :: 3 : 12$, si avrà $2 \times 12 = 8 \times 3$.

132. Può accadere che uno de' termini della proporzione sia l' unità; ed allora uno de' due prodotti, che sono sempre eguali, si riduce ad un solo estremo o ad un solo medio.

133. Nella proporzione *continua* $a : b :: b : c$, dove i medj sono eguali, e che si scrive così $\div a : b : c$, il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del termine medio b.

134. *Reciprocamente, allorchè quattro termini* a, b, c, d, *sono tali che il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj, questi quattro termini formano una proporzione geometrica.*

Imperciocchè essendo $ad = bc$, si avrà (dividendo tutto per bd) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, che equivale alla proporzione $a : b :: c : d$.

135. Se in una proporzione geometrica, si conoscono i due medj ed un

estremo, si avrà l' estremo incognito, con dividere il prodotto de' medj per l' estremo cognito: se si conoscono i due estremi ed un medio, si avrà il medio incognito, con dividere il prodotto degli estremi pel medio cognito.

136. Se nella serie a, b, c, d, fosse $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, si avrebbe (moltiplicando tutto per bd), $ad > bc$. E reciprocamente, se fosse $ad > bc$, si avrebbe (dividendo tutto per bd), $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

137. *Se si ha la proporzione* a:b::c:d; *le disposizioni seguenti* [*alle quali si danno i nomi scritti qui a canto di esse*] *formano ancora altrettante proporzioni.*

I.	$a:c::b:d$	) *alternando*
II.	$d:b::c:a$	)
III.	$b:a::d:c$	) *invertendo*
IV.	$c:a::d:b$	)
V.	$a+b:a::c+d:c$	) *componendo*
VI.	$a+b:b::c+d:d$	)

VII.	$a-b:a::c-d:c$	*dividendo*
VIII.	$a-b:b::c-d:d$	
IX.	$a+c:b+d::a:b$ $::c:d$	Somma o differenza degli antecedenti: somma o differenza de' conseguenti : : antecedente : conseguente.
X.	$a-c:b-d::a:b$ $::c:d$	

Si vedrà che tutte queste disposizioni formano altrettante proporzioni, chiamando $\frac{1}{r}$ la ragione della proporzione fondamentale $a:b::c:d$; mettendo ar in vece di b, cr in vece di d; ed osservando che in ciascuna di esse il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj.

138. *Se si ha le serie de' rapporti eguali* (*) a : b :: c : d :: e : f :: g : h :: i : k, *se ne potranno concludere le proporzioni seguenti.*

(*) Si deve badar bene a non confondere, in generale, una serie di rapporti eguali con una progressione. Affinchè de' rapporti siano eguali, basta che dividendo similmente i due termini di ciascun rapporto, l' uno per l'altro, tutti i quoti siano eguali fra loro; ma affinchè una serie di termini formi una

I. *La somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.*

II. *La somma di un numero qualunque d'antecedenti sta alla somma d'un pari numero di conseguenti corrispondenti, come un antecedente al suo conseguente, ovvero come un'altra somma d'antecedenti ad una pari somma di conseguenti corrispondenti.*

Di fatti. I Si ha subito, per l'articolo precedente, $a+c:b+d::a:b::c:d$ ovvero (a motivo di $c:d::e:f$) $a+c:b+d::e:f$; il che da pure $a+c+e:b+d+f::e:f$, ovvero (a motivo di $e:f::g:h$) $a+c+e:b+d+f::g:h$; il che dà $a+c+e+g:b+d+f+h::g:h$, ovvero (a motivo di $g:h::i:k$) $a+c+e+g:b+d+f+h::i:k$; il che dà $a+c+e+g+i:b+d+f+h+k::i:k::e:f::c:d::a:b$.

II. Si ha $a+c+e:b+d+f::e:f$, ed $a+c+e+g:b+d+f+h::g:h::e:f$;

---

progressione, bisogna di più che il conseguente del primo rapporto serva d'antecedente al secondo; che il conseguente del secondo serva d'antecedente al terzo; e così di seguito. Laonde si vede che ogni progressione è una serie di rapporti eguali, ma non già ogni serie di rapporti eguali è una progressione.

dunque $a+c+e:b+d+f::a+c+e+g:b+d+f+h$.

Si troveranno allo stesso modo le proporzioni seguenti $c+e+g:d+f+h::a:b$; $c+e+g:d+f+h::a+c+e+g+i:b+d+f+h+k$; ed altre simili.

139. Faremo di passaggio un' osservazione che riguarda il modo di scrivere le serie di rapporti eguali. In vece di separare i due termini d' un rapporto con due punti, e due rapporti consecutivi con quattro punti, come si è fatto per le serie $a:b::c:d::e:f::g:h::i:k$, è un poco più comodo lo scrivere prima tutti gli antecedenti, in seguito tutti i conseguenti, separando i termini di ciascuna di queste due serie, gli uni dagli altri, con due punti, e la serie degli antecedenti da quella de' conseguenti, con quattro punti, nel modo seguente $a:c:e:g:i::b:d:f:h:k$. Con questo mezzo gli antecedenti ed i conseguenti non sono frammischiati insieme, e si prendon più facilmente le somme d' antecedenti e di conseguenti, di cui si ha bisogno.

140. *Se in una proporzione* a:b::c:d,

si moltiplicano o si dividono, per uno stesso numero m, *o i due termini d'un medesimo rapporto, o i due antecedenti, o i due conseguenti, si avrà ancora, in tutti i casi, una proporzione; cioè le serie che qui si vedono, formeranno altrettante proporzioni.*

$am : bm :: c : d$	$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: c : d$
$a : b :: cm : dm$	$a : b :: \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$
$am : b :: cm : d$	$\frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d$
$a : bm :: c : dm$	$a : \frac{b}{m} :: c : \frac{d}{m}$

Perciocchè in ciascuna di queste otto serie, il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj, come si vedrà chiamando $\frac{1}{r}$ la ragione della proporzione fondamentale $a : b :: c : d$, e sostituendo ar invece di b, cr invece di d.

141. *Se si ha un numero qualunque di proporzioni, come quelle che qui si vedono, le serie che si formeranno (e che sono scritte qui a canto), col moltiplicarle o col dividerle, saranno ancora altrettante proporzioni.*

$a : b :: c : d$
$e : f :: g : h$
$i : k :: l : m$
ec.
$ae : bf :: cg : dh$
$aei : bfk :: cgl : dhm$

$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} :: \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$

$\frac{a}{ei} : \frac{b}{fk} :: \frac{c}{gl} : \frac{d}{hm}$

ec.

Imperciocchè siano $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, ec., le ragioni delle proporzioni fondamentali: mettendo aq in vece di b, cq in vece di d, er in vece di f, gr in vece di h, is in vece di k, ls in vece di m, si vedrà che in ciascuna delle nuove serie, il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj, e che per conseguenza queste serie formano altrettante proporzioni geometriche.

Il rapporto che regna in una proporzione risultante dalla moltiplica d'un numero qualunque di proporzioni, chia-

masi *rapporto composto* dai rapporti di queste proporzioni.

142. Allorchè quattro grandezze sono in proporzione, i loro quadrati, i loro cubi, ed in generale, le loro potenze omologhe sono altresì in proporzione; perciocchè si può supporre nel Teorema precedente, che le proporzioni fondamentali siano la medesima, scritta quante volte si voglia; ed allora colla moltiplica successiva, termine per termine, di queste proporzioni identiche, risulteranno i quadrati, i cubi, ed in generale le potenze simili de' termini di una tra loro, le quali potenze formeranno quindi altrettante proporzioni. E reciprocamente, se quattro potenze qualunque formano una proporzione, le loro radici formeranno altresì delle proporzioni; perciocchè se si ha $a^n : b^n :: c^n : d^n$ si avrà $a^n \times d^n = b^n \times c^n$; dunque levando la radice n da ciascun membro, si avrà $ad = bc$; il che dà $a : b :: c : d$.

L' uso è di dire che la ragione de' quadrati è *duplicata* di quella delle radici quadrate; che la ragione de' cubi è *triplicata* di quella delle radici cu-

biche, ec. Sopra di che bisogna osservare che si chiama eziandio ragione *duplicata*, *triplicata*, o ec., la ragione che regna nella proporzione risultante dalla moltiplica di due, di tre proporzioni, ec., che hanno la medesima ragione, senza che però i termini di queste proporzioni siano gli stessi. Per esempio, se si hanno le proporzioni che qui si vedono, e la cui ragione comune è 2: la ragione della prima proporzione

$$4:2::6:3$$
$$10:5::16:8$$
$$14:7::18:9$$

composta $4\times10:2\times5::6\times16:3\times8$ si dirà *duplicata* della ragione 2; la ragione della seconda proporzione composta $4\times10\times14:2\times5\times7::6\times16\times18:3\times8\times9$ si dirà *triplicata* della ragione 2; e così di seguito. Di fatti egli è chiaro che la ragione della prima o della seconda proporzione composta è la stessa della ragione che regnerebbe tra i quadrati, o tra i cubi de' termini di ciascuna delle proporzioni componenti; poichè si ha $\frac{4}{2}$ o $\frac{6}{3}=\frac{10}{5}$ o $\frac{16}{8}=\frac{14}{7}$ o $\frac{18}{9}$.

143. *Se si ha un numero qualunque di proporzioni, tali che i conseguenti della prima servano di antecedenti alla seconda, i conseguenti della seconda di antecedenti alla terza, e così di seguito: gli antecedenti della prima, ed i conseguenti dell' ultima formeranno una proporzione, cioè a dire, si avrà* a : g :: c : h.

$a : b :: c : d,$
$b : e :: d : f,$
$e : g :: f : h,$
ec.

Imperciocchè si ha $abe : beg :: cdf : dfh$. Dividendo i due termini del primo rapporto per be, ed i due termini del secondo rapporto per df, si avrà ancora la proporzione $a : g :: c : h$.

144. *In ogni progressione geometrica* ∺ a : b : c : d : e : f : g : h : i : k, *un termine qualunque è uguale ad un altro diviso per la ragione della progressione, elevata ad una potenza denotata dal numero de' termini. dal primo inclusivamente sino all' altro esclusivamente.*

Imperciocchè sia $\frac{1}{r}$ la ragione della progressione: si avrà $b = ar$, $c = br = ar^2$, $d = cr = ar^3$, ec. Dunque la progressione potrà essere scritta così ∺ $a : ar :$

$ar^2 : ar^3 : ar^4 :$ ec. Allora si vede, per esempio, che il quinto termine ar^4 è uguale al primo diviso per la quarta potenza $\frac{1}{r^4}$ di $\frac{1}{r}$; che il settimo termine ar^6 è uguale al secondo ar diviso per la quinta potenza $\frac{1}{r^5}$ di $\frac{1}{r}$; e così di mano in mano.

145. Di qui segue, che conoscendo solamente un termine d'una progressione, e la ragione si potrà formare questa progressione, sia che essa debba discendere o che debba ascendere; poiche non bisognerà per ciò che dividere il termine dato per le potenze successive della ragione.

146. Se in una progressione si prendono quattro termini, tali che ve ne siano tanti fra il primo ed il secondo, quanti ne sono fra il terzo ed il quarto; questi quattro termini formeranno una proporzione geometrica. Perocchè la ragione de' due primi, e quella de' due ultimi saranno la stessa potenza della ragione che regna in tutta la

progressione. E siccome in ogni proporzione geometrica, il prodotto degli estremi è uguale a quello de' medj, si vede ancora che il prodotto degli estremi di quattro termini, presi ad intervalli eguali in una progressione geometrica, sarà uguale al prodotto de' medj.

147. Se fra due termini a, u, si vuole inserire un numero n di medj proporzionali geometrici, si vede che la questione si riduce a formare una progressione geometrica, il cui numero de' termini sia $n+2$. Ora chiamando $\frac{1}{r}$ la ragione incognita di questa progressione, si avrà $u = ar^{n+1}$; il che dà $r^{n+1} = \frac{u}{a}$, e (cavando la radice $n+1$ da ciascun membro), $r = \sqrt[n+1]{\frac{u}{a}}$. Dunque $\frac{1}{r} = \sqrt[n+1]{\frac{a}{u}}$. Dunque la ragione $\frac{1}{r}$ sarà cognita. Quindi si pos-

sono determinare tutti i termini della progressione.

148. Se fra tutti i termini d'una progressione geometrica $\div a:b:c:d:e:f:$ ec. si inserisce un medesimo numero di medj proporzionali geometrici: la nuova serie che si formerà, sarà ancora una progressione geometrica. Imperciocchè, essendo n il numero de' medj proporzionali geometrici inseriti tra a e b, tra b e c, tra c e d, ec., la ragione della prima progressione parziale sarà (art. prec.) $\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}$; quella della seconda, $\sqrt[n+1]{\frac{b}{c}}$; quella della terza, $\sqrt[n+1]{\frac{c}{d}}$; ec. Ora per la natura della progressione fondamentale, si ha $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, ec. Dunque regna la medesima ragione in tutte le progressioni parziali; e siccome l'ultimo termine della prima è primo termine della seconda, l'ultimo termine della seconda è primo termine della terza, e così di seguito: egli è

evidente che tutte queste progressioni, poste l'una di seguito all'altra, formeranno una sola e medesima progressione.

149. *Ogni progressione geometrica* ∺ a : b : c : d : e : f : g : h, *dà queste proporzioni: il quadrato del primo termine sta al quadrato del secondo, come il primo al terzo: il cubo del primo termine sta al cubo del secondo, come il primo al quarto; ed in generale le potenze simili de' due primi termini stanno fra loro come il primo termine ad un termine, il cui numero sia l'esponente delle potenze de' due primi, aumentato dell'unità.*

Imperciocchè, sia n l'esponente comune delle potenze de' due primi termini, e mettiamo la progressione proposta, sotto questa forma ∺ $a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 : ar^5$: ec. Si vede che $a^n : a^n r^n :: a : ar^n$; poichè il prodotto degli estremi è uguale a quello de' medj. D'altronde è manifesto che il numero dell'ultimo termine ar^n, è precisamente $n + 1$. Dunque, ec.

150. *Ogni progressione geometrica* ∺ a : b : c : d : e : f : g : h : i : k, *dà questa proporzione: il primo termine sta*

al secondo, come la somma di tutti i termini, meno l'ultimo, sta alla somma di tutti i termini, meno il primo; cioè a dire (chiamando s la somma totale de' termini) $a : b :: s - k : s - a$.

Di fatti, una progressione geometrica non è che una serie di rapporti eguali, di cui tutti i termini sono antecedenti, eccetto l'ultimo, e di cui tutti i termini sono conseguenti, eccetto il primo. Dunque si avrà $a : b :: s - k : s - a$,

151. In quest'ultima proporzione, facendo il prodotto degli estremi e quello de' medj, si avrà $as - aa = bs - bk$; d'onde si ricava $s = \frac{aa - bk}{a - b}$: espressione della somma della progressione, per mezzo del primo termine, del secondo, e dell' ultimo.

152. Se si chiama $\frac{1}{r}$ la ragione della progressione, e si sostituisce ar in vece di b, nel valore di s, si troverà $s = \frac{a - kr}{1 - r}$.

153. Quando la progressione va decrescendo sino all' infinito (*a*), allora il suo ultimo termine può essere riguardato come nullo per rapporto al primo, e si ha semplicemente $s = \frac{a}{1-r}$.

(*a*) Una progressione geometrica che si supponga continuata all' infinito, non ha propriamente parlando, nè ultimo termine nè somma definita. Perocchè ogni termine, comunque si prenda lontano dal principio della progressione stessa, ne lascia necessariamente infiniti altri dopo di se: i quali non si possono nè raccoglier tutti in una espression sola, nè ommettere senza nuocere alla rigorosa esattezza del risultamento.

Ma sebbene sia proprietà essenziale delle progressioni geometriche continuabili all' infinito, tanto *crescenti* come *decrescenti*, il non aver somma determinata; avvi non pertanto tra l' une e l' altre, anche per questo rispetto, una differenza importantissima. Nelle progressioni *crescenti*, la somma può, coll' estendersi mano a mano più oltre il numero de' termini, eccedere qualunque grandezza immaginabile: laddove, per le *decrescenti*, a qualsiasi numero di termini elleno siano spinte, v' ha sempre un *limite* preciso, cui la loro somma non può oltrepassare, o a cui, moltiplicando il numero de' termini, può la somma stessa avvicinarsi quanto si voglia. Siffatto *limite*, nel caso nostro, è appunto indicato dalla formola $\frac{a}{1-r}$: che in conseguenza non esprime propriamente la somma della progressione infinita $\div\!\div a : ar : ar^2$, ec., ma

154. *Conoscendo in una progressione geometrica tre di queste cinque cose, il primo termine, l'ultimo, la ragione, il numero de' termini, la somma di tutti i termini: trovare le due altre?*

---

piuttosto il valore determinato a cui va sempre più accostandosi la somma medesima, secondo che si fa maggiore il numero de' termini.

Questo successivo e indefinito accostamento dell' anzidetta somma al valore $\frac{a}{1-r}$, riuscirà manifesto, se si considerino attentamente le variazioni cui va soggetta l'equazion dell'articolo precedente, $s = \frac{a-kr}{1-r}$, o sia $s = \frac{a}{1-r} - k\frac{r}{1-r}$. Il primo termine $\frac{a}{1-r}$ del secondo membrò rimaner deve costantemente lo stesso, a qualunque numero di termini voglíasi portata la progressione; e tutto il cambiamento possibile ridurrassi quindi al secondo termine $-k\frac{r}{1-r}$, in cui entra come fattore, l'ultimo termine mutabile k della progression medesima. D'onde è evidente che

1.° La somma di una progression decrescente, qualunque numero di termini, anche grandissimo, abbracci, sarà sempre $< \frac{a}{1-r}$, poichè k non diven

Chiamiamo il primo termine . . . a,
l' ultimo . . . . u,
la ragione . . . . q,
il numero de' termini . . . . . n,
la somma di tutti i termini . . s,

Si avranno (144, e 152) le due equazioni

$$(A)\ u = aq^{n-1};\ (B)\ s = \frac{a - uq}{1 - q}.$$

Date adesso tre delle cinque quantità a, u, q, n, s, si tratta di trovare le due altre; dal che risulta la seguente

---

rà mai nullo, nè nullo in conseguenza il termine $-k\frac{r}{1-r}$;

2.° Potendosi, col continuare della progressione, far picciolo, quanto si voglia, l' ultimo termine k, potrà pure decrescere oltre ogni misura il prodotto $-k\frac{r}{1-r}$, e però nell' ipotesi di progression decrescente e continuabile all'infinito, diverrà minore di qualsiasi quantità data la differenza tra i due valori $\frac{a-kr}{1-r}$, $\frac{a}{1-r}$: cioè sarà $\frac{a}{1-r}$ il *limite* della somma de' termini della divisata progressione.

TAVOLA

Per le progressioni geometriche.

Date	Si ha	Formule
q, n, u	a	$a = \frac{u}{q^{n-1}}$
q, n, s		$a = s\left(\frac{q-1}{q^n - 1}\right)$
q, u, s		$a = q(u-s) + s$
n, u, s		$(s-a)\, a^{\frac{1}{n-1}} = (s-u)\, u^{\frac{1}{n-1}}$
a, n, u	q	$q = \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$
a, n, s		$q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0$
a, u, s		$q = \frac{s-a}{s-u}$
n, u, s		$q^n - \frac{s}{s-u}q^{n-1} + \frac{u}{s-u} = 0$

Date	Si ha	Formule
a, q, n	u	$u = a q^{n-1}$
a, n, s		$(s-u)\, u^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)\, a^{\frac{1}{n-1}}$
a, q, s		$u = s - \frac{(s-a)}{q}$
q, n, s		$u = s\, q^{n-1} \left(\frac{q-1}{q^n - 1} \right)$
a, n, u	s	$s = \frac{a^{\frac{n}{n-1}} - u^{\frac{n}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}} - u^{\frac{1}{n-1}}}$
a, q, n		$s = a \left(\frac{q^n - 1}{q-1} \right)$
a, q, u		$s = \frac{u q - a}{q - 1}$
q, n, u		$s = \frac{u}{q^{n-1}} \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$

155. *Convertire in frazione ordinaria finita la frazione decimale infinita* **0,2222 ec.**

Questa frazione equivale evidentemente alla progressione decrescente $\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}$, ec., continuata all' infinito. In conseguenza s' otterrà la frazione finita che cercasi, con determinare il *limite* della somma della serie stessa, o sia con determinare la somma medesima dietro all' equazione $s=\frac{a}{1-q}$. Ma nel nostro caso $a=\frac{2}{10}$, e $q=\frac{1}{10}$. Dunque $\frac{a}{1-q}$, o sia la frazione decimale periodica 0,2222 ec.

$$=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}.$$

Di fatti, se la frazione comune $\frac{2}{9}$ vogliasi svolgere in frazione decimale, tornerà la proposta 0,2222 ec.

156 Lo stesso metodo potrà servire egualmente per ridurre a frazione or-

dinaria ogni altra frazione periodica decimale, qualunque numero di cifre abbracci il periodo. Per esempio, data la frazione periodica 0,353535 ec., si osserverà ch'essa equivale alla progressione $\frac{35}{100} + \frac{35}{10000} + \frac{35}{1000000}$ ec.: e quindi troverassi per *limite* del suo valore $\frac{\frac{35}{100}}{1 - \frac{1}{100}}$, o sia $\frac{35}{99}$. Così pure alla frazione 0,257257 ec. sostituendo la progressione equivalente . . . . . . $\frac{257}{1000} + \frac{257}{1000000}$ ec., avrassi per risultamento $\frac{257}{999}$. E in generale, *qualunque frazione decimale periodica* 0, a b c d ec., *potrà sempre esprimersi con una frazione ordinaria, la quale abbia per numeratore le cifre componenti il periodo* a b c d, ec. *della decimale, e per denominatore la cifra* 9 *ripetuta tante volte quante eran le cifre del periodo divisato*.

157. *Determinare la somma della progressione* $\frac{c^2}{a} - \frac{c^2 b}{a^2} + \frac{c^2 b^2}{a^3} - \frac{c^2 b^3}{a^4}$ ec. *continuata all' infinito, nell' ipotesi di* $a > b$?

Poichè i termini di questa progressione sono alternativamente positivi e negativi, noi la concepiremo ripartita in due serie; delle quali la prima contenga i soli termini positivi, la seconda i soli negativi. Per tal modo, in vece della proposta progressione, avremo le due

$$\frac{c^2}{a} + \frac{c^2 b^2}{a^3} \text{ ec. (A)},$$

$$\frac{c^2 b}{a^2} + \frac{c^2 b^3}{a^4} \text{ ec. (B)};$$

e la somma che cerchiamo, sarà eguale alla somma di (A), meno quella di (B).

Ora in ciascuna delle due progressioni parziali, ogni termine è eguale a quello che lo precede, moltiplicato per $\frac{b^2}{a^2}$. Per conseguenza sarà quì $q = \frac{b^2}{a^2}$;

ed essendo per ipotesi $a > b$, entrambe le progressioni saranno decrescenti. Sicchè, chiamata s la somma di (A), s' quella di (B), avremo $s = \frac{\frac{c^2}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}$,

$s' = \frac{\frac{c^2 b}{a^2}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, o sia $s = \frac{ac^2}{a^2 - b^2}$, e $s' = \frac{bc^2}{a^2 - b^2}$. Pertanto riuscirà $s - s' = \frac{ac^2 - bc^2}{a^2 - b^2} \ldots\ldots = c^2 . \frac{a - b}{a^2 - b^2} = c^2 . \frac{a - b}{(a - b) . (a + b)} = \frac{c^2}{a + b}$: cioè uguale alla frazione, dal cui sviluppo in serie erasi di fatti ottenuta la progressione proposta.

158. Anche senza sciogliere in due la data progressione, si può con altro processo di calcolo ottenerne la somma, o sia il limite a cui questa va

continuamente approssimandosi, nel supposto di $a > b$. Basterà a tal uopo sottrarre ciascun termine negativo dal positivo che lo precede immediatamente: i residui per necessità positivi, daranno la serie $\frac{ac^2 - bc^2}{a^2} + \frac{ab^2c^2 - b^3c^2}{a^4} + \frac{ab^4c^2 - b^5c^2}{a^6}$ ec.; in cui è chiaro che ciascun termine eguaglia il termine precedente moltiplicato per $\frac{b^2}{a^2}$, e la quale per conseguenza risulterà progression geometrica decrescente all' infinito. Laonde applicando ad essa la formola della Tavola, e ponendo $\frac{b^2}{a^2}$ in luogo di q, avrassi $s = \frac{\frac{ac^2 - bc^2}{a^2}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{ac^2 - bc^2}{a^2 - b^2} = \frac{c^2(a-b)}{a^2 - b^2} = \frac{c^2}{a+b}$, come poc' anzi.

CAPITOLO IX.

De' Logaritmi.

159. Vi è una corrispondenza insigne tra la porporzione aritmetica e la proporzione geometrica, come pure tra la progressione aritmetica e la progressione geometrica. Nella proporzione aritmetica si ha uno degli estremi o de' medj, con sottrarre dalla somma de' medj o dalla somma degli estremi, l'altro estremo o l'altro medio: nella proporzione geometrica si ha uno degli estremi o de' medj, con dividere il prodotto degli estremi o quello de' medj, per l'altro estremo o per l'altro medio. Parimente nella progressione aritmetica, un termine qualunque è uguale al primo, più la differenza additiva o sottrativa, ripetuta tante volte quanti sono i termini dopo l'uno sino all'altro: nella progressione geometrica, un termine qualunque è uguale al primo, moltiplicato o diviso per la frazione che ha per numeratore il conseguente d'un rapporto e per deno-

minatore l' antecedente, tante volte quanti sono i termini dopo l' uno sino all' altro. Laonde si vede che nelle proporzioni e progressioni aritmetiche si fa uso dell' addizione e della sottrazione nelle medesime circostanze, in cui nelle proporzioni e progressioni geometriche si fa uso della moltiplica e della divisione.

160. Colpito da questa analogia, e considerando da un altro lato che la moltiplica e la divisione sono operazioni molto più lunghe dell' addizione e della sottrazione, il Barone di Neper, Scozzese, che fioriva sul principio del secolo XVII.°, immaginò di sostituire ai numeri in progressione o proporzione geometrica, altri numeri in progressione o proporzione aritmetica, e di ridurre con questo mezzo le principali operazioni dell' Aritmetica a semplici addizioni e sottrazioni: idea molto ingegnosa, che rende servizj immortali a tutte le scienze matematiche, e principalmente all' Astronomia. I numeri della seconda progressione si chiamano i *logaritmi* di quelli della progressione prima.

161. Siano adunque, per esempio, le due progressioni che quì si vedono:

una aritmetica ÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . ec.
l' altra geometrica ∺ 4 : 12 : 36 : 108: 324 : 972 : ec.

Ciascun termine della serie superiore sarà il *logaritmo* del termine corrispondente della serie inferiore. E se in ciascuna di queste due serie, si prendono quattro termini che si corrispondano ciascuno a ciascuno, e tali che ve ne siano tanti fra il primo ed il secondo, quanti fra il terzo ed il quarto, si avranno due proporzioni, una aritmetica, l' altra geometrica. Tutte le operazioni di cui sono suscettibili i termini della serie inferiore per via di moltiplica e di divisione, si potranno fare sopra quelli della prima per via di addizione e di sottrazione. Sopra questo principio si sono formate delle Tavole che contengono i termini d' una progressione geometrica estesa più o meno, coi logaritmi che loro corrispondono: queste Tavole si chiamano d' ordinario *Tavole de' Logaritmi*.

162. È chiaro che la scelta della progressione geometrica, e quella della progressione aritmetica corrispondente,

sono egualmente arbitrarie. (*a*) Ma nelle Tavole ordinarie si è preso per la progressione geometrica, la progressione decupla ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : ec., perchè essa serve di fondamento alla numerazione; e per la progressione de' logaritmi, la progressione aritmetica de' numeri naturali ÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. ec., perchè è la più semplice di tutte le progressioni aritmetiche.

163. Ben si scorge che si hanno subito immediatamente i logaritmi di tutti i numeri compresi nella progressione geometrica; poichè questi logaritmi non sono altra cosa che i termini corrispondenti della progressione aritmetica. Ma fra i due primi termini 1 e 10 della progressione geometrica, vi sono i nu-

(*a*) Comunque sia certo che la scelta delle due progressioni è arbitraria, non però in ogni possibile sistema di Logaritmi avrebbon luogo tutti i teoremi dimostrati in appresso dall'Autore. Alcuni o anzi la più parte di questi suppongono esenzialmente uguale a zero il logaritmo dell'unità, cioè suppongono che al termine 1 della progressione geometrica corrisponda il termine 0 dell'aritmetica: supposizione che non si verifica nelle due serie recate ad esempio più sopra, e che può, com'è evidente, non verificarsi in infinite altre.

meri 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; fra il secondo termine 10 ed il terzo 100, vi sono i numeri 11, 12, 13, 14, ec.; fra il terzo termine 100 ed il quarto 1000, vi sono i numeri 101, 102, 103, ec.; così di seguito. Si trattava dunque di trovare i logaritmi di questi numeri intermedj, per poterli inserire nelle Tavole.

164. I primi Calcolatori delle Tavole de' logaritmi, hanno determinato per mezzo d'estrazioni di radici, assai lunghe e penose, i logaritmi de' numeri di cui abbiamo parlato. L'Algebra somministra al presente de' mezzi molto più semplici e più comodi per arrivare al medesimo fine. Noi spiegheremo nel progresso del presente Corso alcuni di questi mezzi che potranno servire, se non a rifare intieramente ciò che è già fatto, almeno a verificare molti numeri delle antiche tavole, ed anche ad estendere di più queste tavole, se si giudicasse necessario.

165. Osserveremo frattanto che la progressione geometrica $\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : ec., è la stessa cosa di $\div\!\div (10)^0 : (10)^1 : (10)^2$: ec.; dal che si vede che i logaritmi di

questi termini sono gli esponenti del numero 10, elevato successivamente alle potenze 0, 1, 2, 3, 4, ec.. Medesimamente un numero qualunque non compreso nella progressione geometrica proposta, per esempio il numero 3, può essere considerato come una potenza frazionaria di 10; cioè a dire, si può supporre di avere l'equazione $3 = (10)^{\pi}$, essendo π l'esponente o l'indice d'una certa radice di 10, che renda questa equazione vera in effetto; e questo esponente è il logaritmo di 3.

166. Il numero 10 chiamasi *base de' logaritmi*, o *base logaritmica* per le tavole ordinarie; ed in generale chiamasi *base* d'un sistema qualunque di logaritmi quel numero il cui logaritmo nel sistema stesso, è l'unità.

167. Supponiamo in generale che il numero a, maggiore dell' unità, sia la base d'un sistema di logaritmi, e diamogli l'esponente variabile z; di modo che l'espressione a^z rappresenti tutti i numeri possibili, con attribuire successivamente differenti valori all'esponente z. Egli è chiaro.

1.° Che il logaritmo dell' unità sarà sempre zero, qualunque sia la base a. Imperciocchè, in generale $a^0 = 1$.

2.° Che il logaritmo della base a sarà 1; poichè a è la stessa cosa di a^1.

3.° Che tutti i numeri maggiori di 1 avranno per logaritmi de' numeri positivi. Così per esempio, supponendo $a = 10$ il numero 1000, o sia $(10)^3$, ha per logaritmo il numero positivo 3.

4.° Che tutti i numeri minori di 1 avranno per logaritmi de' numeri negativi. Imperciocchè supponendo, per esempio $a = 10$, il numero $\frac{1}{1000}$, o sia $(10)^{-3}$, ha per logaritmo il numero negativo -3.

168. Siano due numeri N ed N', ai quali corrispondano rispettivamente i due logaritmi p e p', per una stessa base logaritmica a: si avrà $N = a^p$, $N' = a^{p'}$, e per conseguenza $N \times N' = a^p \times a^{p'} = a^{p+p'}$. Laonde si vede che in ogni sistema di logaritmi, il logaritmo $p + p'$ d' un prodotto $N \times N'$, composto di due fattori, è uguale alla

somma de' logaritmi di questi fattori.

169. Di qui segue che se vi siano de' numeri A, B, C, D, quanti si vogliono, si avrà, servendosi della lettera l per denotare un logaritmo,

1.° $l.(A\times B\times C\times D)=l.A+l.B+l.C+l.D$. Imperciocchè supponiamo $A\times B=N$; avremo $l.(A\times B\times C\times D)=l.(N\times C\times D)$. Sia ancora $N\times C=N'$; si avrà $l.(A\times B\times C\times D)=l.(N'\times D)=l.N'+l.D$. Ora $l.N'=l.(N\times C)=l.N+l.C$, e $l.N.=l.(A\times B)=l.A+l.B$. Dunque in fine $l.(A\times B\times C\times D)=l.A+l.B+l.C+l.D$. Quindi *il logaritmo d' un prodotto, composto d'un numero qualunque di fattori, è uguale alla somma de' logaritmi di questi fattori.*

2.° Se $A=B=C=D$, si avrà $l.(A\times A\times A\times A)$ o sia $l.A^4=4\,l.A$. In generale $l.A^n=n\,l.A$; vale-a-dire *il logaritmo d' una potenza intiera positiva* n *d'un numero* A, *è uguale ad* n *volte il logaritmo di* A.

3.° Si ha altresì $l.A^{\frac{n}{p}}=\frac{n}{p}\,l.A$, ove

siano n e p numeri interi positivi. Imperciocchè sia $A^{\frac{n}{p}}=K$, e per conseguenza $l.A^{\frac{n}{p}}=l.K$. L'equazione $A^{\frac{n}{p}}=K$, dà (innalzando tutto alla potenza p) $A^n=K^p$; e per conseguenza $n.l.A=pl.K$, o sia $\frac{n}{p}l.A=l.K=l.A^{\frac{n}{p}}$.

170. Dal medesimo principio segue 1.° che $l.\frac{A}{B}=l.A-l.B$. Perciocchè sia $\frac{A}{B}=Q$, e per conseguenza $A=B\times Q$; si avrà $l.A=l.(B\times Q)=l.B+l.Q$; dunque $l.Q.=l.A-l.B$. Quindi *il logaritmo del quoto è uguale al logaritmo del dividendo, meno il logaritmo del divisore;* ovvero ancora, *il logaritmo d'una frazione è uguale al logaritmo del numeratore, meno il logaritmo del denominatore.*

2. $l.A^{-n}=-n\,l.A$. Imperciocchè $A^{-n}=\frac{1}{A^n}$; dunque $l.A^{-n}=l.1-$

$l.A^n = 0 - n.l.A$: il che non è altro che $-n.l.A$.

3.° $l.A^{-\frac{n}{p}} = -\frac{n}{p}l.A$; poichè $A^{-\frac{n}{p}} = \frac{1}{A^{\frac{n}{p}}}$: donde risulta $l.A^{-\frac{n}{p}} = 0 - \frac{n}{p}l.A = -\frac{n}{p}l.A$.

171. Supponiamo ora due sistemi di logaritmi, le cui basi siano rispettivamente a e b, sia il medesimo numero N che abbia p per logaritmo nel primo sistema, e q per logaritmo nel secondo; avremo in conseguenza $N = a^p$, $N = b^q$; il che dà $a^p = b^q$, e $b = a^{\frac{p}{q}}$. Dunque prendendo i logaritmi pel sistema a, si avrà $l.b = \frac{p}{q}l.a$; o veramente (a motivo di $l.a = 1$), $l.b = \frac{p}{q}$; ovvero $q = \frac{p}{l.b} = p \times \frac{1}{l.b}$. Quindi,

conoscendo il logaritmo p *d'un numero qualunque* N, *pel sistema* a, *si avrà il logaritmo* q *dello stesso numero, pel sistema* b, *moltiplicando* p *per una frazione che abbia per numeratore l' unità, e per denominatore il logaritmo della base* b, *preso nel sistema* a.

Uso delle Tavole de' Logaritmi nei calcoli numerici.

172. La teoria delle Tavole ordinarie de' logaritmi essendo fondata sopra la corrispondenza delle due progressioni

$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \;: \text{ec.}$$
$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \text{ec.}$$

concepiamo che in tutta l' estensione di ciascuna di esse, si inserisca tra due termini consecutivi, un medesimo numero N di medj proporzionali aritmetici per la prima, e di medj proporzionali geometrici per la seconda. Con ciò si avranno ancora due progressioni che si corrisponderanno termine a termine. Ora, se il numero N è supposto grandissimo, come per esempio 10000000, egli è

evidente che nella progressione geometrica parziale da 1 a 10, due termini consecutivi differiranno poco l' uno dall' altro, e che per conseguenza ciascuno de' numeri 2, 3, 4, ec., compresi fra 1 e 10, o si troverà eguale ad uno de' termini della progressione, o sarà almeno compreso tra due termini presso che uguali; che parimente nella progressione geometrica parziale da 10 a 100, ciascuno de' numeri 11, 12, 13, 14, ec., compresi tra 10 e 100, sarà uguale, almeno sensibilmente, ad uno de' termini di questa progressione; e così di seguito. Per conseguenza si potranno prendere per logaritmi de' numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ec. i termini della progressione aritmetica, che corrispondono a quelli della progressione geometrica, nel luogo de' quali si sostituiscono i numeri che abbiamo enunziati. Egli è vero che i calcoli necessarj per determinare effettivamente i termini delle due progressioni, sarebbero d' una lunghezza insuperabile nella pratica: ma i mezzi compendiosi che si son trovati per calcolare i loga-

ritmi in qualunque modo si riguardino, sono sempre de' numeri in progressione aritmetica, corrispondenti ad altri numeri in progressione geometrica.

173. Da ciò risulta, che se nella serie dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ec., si prendano quattro termini che formino una proporzione geometrica, i quattro logaritmi corrispondenti formeranno una proporzione aritmetica. Imperciocchè, se nelle tavole si fossero scritti tutti i numeri che esse implicitamente racchiudono, si avrebbero due progressioni corrispondenti termine a termine una geometrica, l' altra aritmetica. Ora quattro numeri presi nella prima essendo supposti in proporzione geometrica, vi sono necessariamente altrettanti termini fra il primo ed il secondo, che fra il terzo ed il quarto; poichè il secondo deve essere composto del primo e della ragione della progressione, esattamente nella stessa maniera onde il quarto è composto del terzo e della medesima ragione. Dunque anche nella progressione aritmetica vi sarà il medesimo numero di termini così fra il

primo logaritmo ed il secondo, come fra il terzo ed il quarto; e per conseguenza questi quattro logaritmi formeranno una proporzione aritmetica.

174. Avanti di spiegare partitamente gli usi delle tavole de' logaritmi, osserveremo 1.° che esse contengono semplicemente la serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ec. coi loro logaritmi: non vi si fanno entrare gli altri medj proporzionali geometrici ed aritmetici, a fine di evitare una prolissità che sarebbe d'altronde inutile; perciocchè vedremo più sotto che coi logaritmi de' numeri compresi nelle tavole, si può determinare il logaritmo d'un numero che non vi è compreso, purchè però questo numero non sia troppo grande relativamente all' estensione delle tavole. Vi sono delle tavole che contengono i logaritmi de' numeri dopo 1 sino a 10000 o 20000; le grandi tavole di Ulacq e quelle di Gardiner vanno sino a 102000.

2.° Che ciascun logaritmo è composto di due parti, la prima delle quali è un numero intero, l'altra contiene delle figure decimali. L'intero si chia-

ma la *caratteristica* del logaritmo. Questa caratteristica contiene sempre tante unità meno una, quante cifre contiene il numero al quale appartiene il logaritmo. Così i logaritmi dei numeri da 1 sino a 9 inclusivamente, hanno o per caratteristica; da 10 sino a 99, hanno 1 per caratteristica; da 100 a 999, hanno 2 per caratteristica, ec. Egli è chiaro di fatti, che essendo o il logaritmo di 1, ed essendo 1 il logarirmo di 10, ogni numero compreso fra 1 e 10, avrà un logaritmo maggiore di o e minore di 1; dunque questo logaritmo non potrà contenere che delle parti decimali. Medesimamente, essendo 2 il logaritmo di 100, ogni numero compreso tra 10 e 100, avrà un logaritmo maggiore di 1 e minore di 2; dunque questo logaritmo conterrà un' unità seguita da parti decimali; così di seguito pei numeri tra 100 e 1000, tra 1000 e 10000, ec. Dopo questa osservazione è cosa facile di supplire la caratteristica nelle tavole, allorchè essa non vi si trova. Vi sono effettivamente delle tavole, come per esempio quelle di Gardiner, ove si è giudicato a propo-

sito di sopprimerla. Vengo agli usi annunziati.

I. *Moltiplica*.

173. Per moltiplicare due numeri l'uno per l'altro, col mezzo delle tavole dei logaritmi, cercate in queste tavole i logaritmi de' numeri proposti; aggiungete insieme questi due logaritmi; la somma sarà il logaritmo del prodotto. Cosicchè cercando nelle tavole questo nuovo logaritmo, troverete a canto il prodotto domandato. Imperciocchè l'unità, il moltiplicatore, il moltiplicando, ed il prodotto formano una proporzione geometrica; per conseguenza i loro logaritmi formano una proporzione aritmetica: e siccome l'unità ha zero per logaritmo, si vede che il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi del moltiplicando e del moltiplicatore.

Si osserverà di passaggio, che la supposizione di zero per logaritmo dell' unità, abbrevia considerabilmente i calcoli numerici per mezzo de' logaritmi.

Supponiamo per esempio, che si domandi il prodotto di 345 per 23.

Trovo che il logaritmo di 345 è. 2,537819
che quello di 23 è 1,361728
donde risulta la somma 3,899547

A questo nuovo logaritmo corrisponde nelle tavole il numero 7935, che è il prodotto domandato.

Si vede, che per avere il logaritmo del prodotto d'un numero moltiplicato per 10, per 100, per 1000, ec., bisogna aumentare di 1, di 2, di 3, ec. la caratteristica del logaritmo di questo numero; poichè i numeri 10, 100, 1000, ec., hanno rispettivamente per logaritmi i numeri 1, 2, 3, ec. Così per esempio, il numero 34 avendo per logaritmo 1,531479, il numero 34000 avrà 4,531479 per logaritmo.

La pratica della moltiplica per logaritmi è comoda e spedita, quando i logaritmi de' fattori e del prodotto della moltiplica sono compresi nell' estensione delle tavole. S' imparerà più sotto a determinare ed i numeri ed i logaritmi che eccedono i limiti delle tavole.

II. Divisione.

176. Poichè in ogni divisione il di-

videndo è uguale al prodotto del divisore pel quoto, segue dall' articolo precedente che il logaritmo del quoto è uguale al logaritmo del dividendo, meno il logaritmo del divisore. Sia proposto per esempio, da dividere 952 per 34: trovo nelle tavole
che il logaritmo di 952 è . . 2,978637,
e quello di 34 è 1,531479,
onde risulta la differenza . . 1,447158.
A quest' ultimo logaritmo corrisponde il numero 28, che è il quoto cercato.

Segue dal medesimo principio, che se dalla caratteristica del logaritmo d'un numero si sottraggono i numeri 1, 2, 3, ec., si avrà il logaritmo del quoto del numero proposto diviso per 10, per 100, per 1000, ec.; poichè 10, 100, 1000, ec., hanno rispettivamente per logaritmi i numeri 1, 2, 3, ec. Così per esempio, il numero 34000 avendo per logaritmo 4,531479, il numero $\frac{34000}{100}$, o sia 340, ha per logaritmo 2,531479. Parimente il numero 16518 avendo per logaritmo 4,217957,

il numero $\frac{16518}{1000}$, ovvero 16,518, ha per logaritmo 1,217957.

177. Può avvenire che il dividendo non sia esattamente divisibile pel divisore, o che i termini della divisione eccedano l'estensione delle tavole, Supponiamo per fissare le idee, che le tavole di cui si fa uso, contengano soltanto i numeri naturali da 1 sino a 20000, coi loro logaritmi. Allora si opererà come prendo a spiegare cogli esempi.

Esempio I. *Dividere* 4587 *per* 39?

Il logaritmo di 4587 è . . 3,661529
quello di 39 è 1,591065
onde risulta la differenza . . . 2,070464

Questo logaritmo non è compreso che in parte nelle tavole. Aumento di 2 la sua caratteristica (il che è moltiplicare per 100 il numero al quale appartiene); ho con ciò il logaritmo 4,070464, che non eccede i limiti delle tavole, e che è compreso fra quelli dei due numeri consecutivi 11761, 11762. Dunque il prodotto del quoto domandato per 100, è a meno

di circa un' unità 11761; e per conseguenza si avrà il vero quoto, a meno di circa un *centesimo*, con dividere il numero 11761 per 100, cioè collo scrivere 117,61.

Se si vuol avere un quoto più prossimo, si comincierà a determinare un numero al quale il logaritmo preparato 4,070464 appartenga più prossimamente che al numero 11761. Per ciò si osserverà, gettando gli occhi sopra le tavole dei logaritmi, che le differenze de' numeri naturali che differiscono poco tra loro, essendo supposte costanti quelle dei loro logaritmi sono altresì ad un di presso costanti; onde risulta potersi supporre che allora le differenze de' logaritmi sono sensibilmente proporzionali alle differenze de' numeri ai quali appartengono. Prendo adunque l' eccesso del logaritmo di 11762 sopra il logaritmo del numero immediatamente inferiore 11761, e l' eccesso del logaritmo preparato 4,070464 sopra il logaritmo di 11761; il primo eccesso è 0,000037; il secondo è 0,000020. In appresso fo questa proporzione, primo eccesso : secondo eccesso :: 1 (dif-

ferenza de' due numeri 11762, 11761); x, che sarà l' eccesso del numero al quale appartiene il logaritmo 4,070464, sopra il numero 11761. Si avrà dunque 0,000037 : 0,000020 :: 1 : x, ovvero (moltiplicando i due primi termimini per 1000000, il che non ne cambia il rapporto) 37 : 20 :: 1 : x; donde si ricava x=0,54, non spingendo l' approssimazione che sino ai centesimi. Per conseguenza il numero al quale appartiene il logaritmo 4,070464, è a meno d' un centesimo circa 11761,54. Ora il logaritmo del quoto 4587 diviso per 39 essendo semplicemente 2,070464, il numero al quale appartiene il logaritmo 4,070464, è cento volte più grande di questo quoto; dunque per avere questo quoto, bisogna dividere 11761,54 per 100, cioè scrivere 117,6154; dunque quest' ultimo numero è a meno d' un diecimillesimo circa, il quoto di 4587 diviso per 39.

Esempio II. *Dividere* 788873 *per* 354?

Siccome il dividendo 788873 eccede 20000, limite supposto delle tavole, ne separo verso la destra, con una

virgola, le ultime due cifre: il che dà il numero cento volte più piccolo 7888,73, la cui parte 7888 è compresa nelle tavole; e prendo la differenza dei logaritmi de' due numeri 7888 e 7889 che si seguono immediatamente. Questa differenza è 0,000055. In seguito fo questa proporzione 1 (eccesso di 7889 sopra 7888) : 0,73 (eccesso di 7888,73 sopra 7888) :: 0,000055 (eccesso del logaritmo di 7889 sopra quello di 7888) : x, che sarà l'eccesso del logaritmo di 7888,73 sopra il logaritmo di 7888. Si avrà dunque 1 : 0,73 :: 0,000055 : x; ovvero (moltiplicando i due primi termini per 100) 100 : 73 :: 0,000055 : x; donde si cava x=0,000040 fermandosi alla sesta figura decimale. Aggiungendo questo numero a 3,896967 (logaritmo di 7888), si avrà 3,897007 pel logaritmo di 7888,73. Dunque aggiungendo 2 unità alla caratteristica, si avrà 5,897007 pel logaritmo del numero proposto 788873, che è cento volte più grande di 7888,73.

Determinato così il logaritmo del dividendo 788873, ne sottraggo 2,549003, logaritmo del divisore 354; ed il resi-

duo è 3,348004. Cercando questo logaritmo nelle tavole, si trova che cade tra quelli dei numeri 2228 e 2229.

Si determinerà in una maniera prossima, col metodo del primo esempio, il numero al quale esso appartiene. Questo numero è 2228,456, a meno d' un millesimo circa.

III. Frazioni.

178. Essendo una frazione il quoto del numeratore diviso pel denominatore, il logaritmo della frazione è uguale a quello del numeratore, meno quello del denominatore; ed il logaritmo del prodotto di più frazioni moltiplicate le une per le altre, è la somma de' logaritmi de' numeratori, meno la somma de' logaritmi de' denominatori. Sia per esempio, da moltiplicarsi la frazione $\frac{5}{8}$ per la frazione $\frac{7}{11}$. Aggiungo il logaritmo di 5 a quello di 7; la somma è 1,544068. Parimente aggiungo il logaritmo di 8 a quello di 11; la somma è 1,944483. Quest' ultimo logaritmo

dovrebbe essere sotratto da 1,544068, per avere il logaritmo della frazione *prodotto*; ma siccome tal sottrazione darebbe un residuo negativo, aumento d' un certo numero d' unità, per esempio di 4, la caratteristica del logaritmo 1,544068: il che è moltiplicare per 10000 il numero al quale esso appartiene. Dalla somma 5,544068 sottraggo 1,944483; il residuo è 3,599585, logaritmo al quale corrisponde il numero 3977, a meno d' un unità circa. Dunque si avrà la frazione *prodotto*, a meno d' un diecimillesimo circa, dividendo questo numero per 10000, cioè a dire scrivendo 0,3977.

Se debbasi moltiplicare un intero per una frazione, o una frazione per un intero, si aggiungerà il logaritmo dell' intero a quello del numeratore della frazione, e si sottrarrà dalla somma il logaritmo del denominatore. Allora, 1.° se il residuo è positivo, lo cercheremo nelle tavole col numero corrispondente; sopra di che bisogna osservare che si potrà avvicinare sempre più, se è necessario, al vero numero, aumentando di alcune unità la

caratteristica del logaritmo, poi separando nel numero trovato tante cifre decimali, quante unità si saranno aggiunte alla caratteristica. 2.° Se il residuo è negativo, si opererà come abbiamo fatto per trovare il prodotto di $\frac{5}{8} \times \frac{7}{11}$.

La divisione d' un numero qualunque A, intero o rotto, per una frazione, si riduce a moltiplicare il numero A per la frazione *divisore* rovesciata: il che ritorna a quanto sopra si è fatto.

Tutte queste operazioni per le frazioni ordinarie, sono ancora più facili per le frazioni decimali. Sia per esempio, da moltiplicarsi un numero qualunque A per la frazione decimale 0,459; sopprimo la virgola decimale del moltiplicatore; cerco nelle tavole il logaritmo di 459; lo aggiungo a quello di A; e trovato il prodotto che corrisponde alla somma di questi due logaritmi, ne separo tre cifre decimali verso la destra con una virgola, perchè sopprimendo la virgola del molti-

plicatore, ho reso il prodotto 1000 volte troppo grande. Se il moltiplicando ed il moltiplicatore contenessero delle parti decimali, bisognerebbe dopo avere trovato il logaritmo del prodotto come se i fattori non contenessero parti decimali, separare nel numero corrispondente a questo logaritmo, tante figure decimali, quante ve n' erano in tutto nei due fattori della moltiplica. Se si proponesse di dividere 0,459 per un certo numero *A*, bisognerebbe sottrarre il logaritmo di *A* da quello di 459; indi trovato il numero al quale corrisponde la differenza di questi due logaritmi, si separerebbero colla virgola tre figure verso la sinistra, per avere il quoto domandato.

IV. Formazione delle potenze, ed etrazione delle radici.

179. Il quadrato d' un numero essendo il prodotto di questo numero moltiplicato per se stesso, ne segue che il logaritmo del quadrato d' un numero è il doppio del logaritmo di questo numero stesso. Il cubo essendo il pro-

dotto del quadrato pel numero generatore, si avrà il logaritmo del cubo, coll' aggiugnere il logaritmo del quadrato a quello del numero, o ciò che torna allo stesso, con *triplicare* il logaritmo del numero. La quarta potenza essendo il prodotto del cubo pel numero generatore, si avrà il logaritmo della quarta potenza, con *quadruplicare* il logaritmo del numero; così di seguito. Per esempo, si deve egli innalzare 15 al cubo? Cerco il suo logaritmo nelle tavole; questo logaritmo è 1,176091; lo triplico, il che dà 3,528273, logaritmo al quale corrisponde il numero 3375, che è il cubo di 15.

Dunque reciprocamente, per avere il logaritmo della radice quadrata, della radice cubica, della radice quarta, ec. d' un numero dato, bisogna dividere per 2, per 3, per 4, ec. il logaritmo di questo numero. In generale si ha $l.\ A^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\ l.\ A$. Se per esempio, si domanda la radice quarta di 81, cercherò nelle tavole il logaritmo di 81; questo logaritmo è 1,908485; ne

prendo il quarto, che è 0,477121; e trovo che a quest' ultimo logaritmo corrisponde il numero 3; che è la radice cercata.

Quando il numero di cui si domanda una radice, non è una potenza perfetta di questa radice, il logaritmo di questa radice si trova nelle tavole soltanto in parte: allora bisogna determinare il logaritmo, ed il numero al quale corrisponde, col metodo dell' articolo 177.

La formazione delle potenze e l' estrazione delle radici delle frazioni non hanno difficoltà alcuna; poichè formare una potenza o estrarre una radice d' una frazione, è lo stesso che innalzare i due termini della frazione a questa potenza, ovvero estrarre questa radice da ciascuno di essi. Per esempio, si deve egli cavare la radice cubica dalla frazione $\frac{5}{12}$, o sia trovare il valore di $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$? Prendo il logaritmo del

numeratore $\sqrt[3]{5}$, cioè a dire il terzo del logaritmo di 5; questo terzo è 0,232990. Prendo il logaritmo del denominatore $\sqrt[3]{12}$, o sia il terzo del logaritmo di 12; questo terzo è 0,359727. Ciò posto, per evitare il residuo negativo che si avrebbe sottraendo il secondo terzo dal primo, e per determinare nel tempo stesso la frazione $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ a meno, per esempio, d'un diecimillesimo circa, aumento di 4 la caratteristica del logaritmo 0,232990 appartenente al numeratore: il che dà 4,232990. Da questo numero sottraggo il logaritmo 0,359727 del denominatore; il residuo è 3,873263. A questo logaritmo corrisponde a meno d'un' unità circa, il numero 7469. Ma questo numero è 10000 volte più grande di $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ (poichè aumentando di 4 la caratteri-

stica del logaritmo del numeratore di questa frazione, si moltiplica questa stessa frazione per 10000); dunque il valore della frazione $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ è 0,7469, a meno d'un diecimillesimo circa.

V. Regola di Proporzione.

180. In ogni proporzione un estremo è eguale al prodotto de' medj, diviso per l'altro estremo: come pure un medio è eguale al prodotto degli estremi, diviso per l'altro medio. Quindi, per avere il logaritmo d'un estremo o d'un medio incognito, basterà sottrarre il logaritmo dell'estremo o del medio già noto dalla somma de' logaritmi de' medj o dalla somma de' logaritmi degli estremi. Se per esempio, si dimandasse il quarto termine d'una proporzione, ove 9, 27, 54 fossero i tre primi; aggiungerei insieme i logaritmi di 27 e 54, la cui somma è 3,263758; da questa somma togliendo 0,954243 (logaritmo di 9), avrei 2,209515 per residuo;

al qual logaritmo corrisponde nelle tavole, il numero 162 quarto termine domandato.

Uso de' Logaritmi per la soluzione dei Problemi.

181. Problema I. *Il possessore di una rendita costante* a, *esigibile allo scadere di ogni anno, vuole in principio di un anno, alienare il proprio diritto per anni* n. *Si cerca la somma* x *cui dovrà pagargli il compratore al momento del contratto, nell' ipotesi che l' interesse del denaro sia* continuo *ed espresso, per l' intervallo di un anno, dalla frazione* $\frac{1}{m}$?

Poichè il compratore acquista il diritto di riscuotere la somma a per anni n, è evidente che $a \times n$ esprimerà la totalità del denaro ch' egli deve ricevere in vigore del divisato contratto. Ma non tutte le parti di questa somma sono esigibili all' epoca stessa, nè tutte in conseguenza aver possono pel compratore un prezzo eguale: la por-

zione esigibile in capo ad un anno, valer dee più di quella che non lo è se non dopo due: la porzione esigibile dopo due, più di quella che non lo è se non dopo tre; e così di mano in mano.

Per determinar dunque con esattezza il valor x, convien conoscere, oltre il dato numero n delle rendite annue vendute, anche il prezzo rispettivo di ciascheduna di loro. E si conoscerà se si osservi

1.° Che essendo l' interesse *continuo*, ed $\frac{1}{m}$ l' espressione dell' interesse annuo, una quantità qualunque a, pagata all' istante, equivale alla quantità $a\left\{1+\frac{1}{m}\right\}$, o sia $a\left\{\frac{m+1}{m}\right\}$, esigibile un anno dopo: che la stessa quantità a equivale alla $a\left\{\frac{m+1}{m}\right\}^2$, esigibile in capo a due anni: alla $a\left\{\frac{m+1}{m}\right\}^3$ esigibile in capo a tre, e così in infinito.

2.° Che viceversa la medesima quantità a esigibile in termini di un anno, avrà per equivalente la quantità $a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}$ pagata all' istante: siccome pure le $a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}^2$, $a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}^3$, ec., pagate tosto, equivaranno rispettivamente alla stessa a, esigibile in termine di due, tre, ec. anni.

Da queste osservazioni raccogliesi che il valore *attuale* x di una rendita costante a, esigibile di anno in anno, per anni n, verrà espresso dalla serie $a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}, a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}^2, a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}^3 \ldots a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}^n$. Esso sarà quindi uguale alla somma di una progressione geometrica, in cui è $a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}$ il primo termine, $a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}^n$ l' ultimo, ed $\frac{m+1}{m}$ la ragione. Per conseguenza valendoci della formola della tavola, avremo . . . .

$$x = \frac{a\left\{\frac{m}{m+1}\right\} - a\left\{\frac{m}{m+1}\right\}^n \cdot \frac{m}{m+1}}{1 - \frac{m}{m+1}}$$

$$= a\left\{m - (m+1)\left\{\frac{m}{m+1}\right\}^{n+1}\right\}$$

Applichiamo questa formola ad un esempio particolare, supponendo $a = 100$ lire, $m = 20$, $n = 9$ anni; sarà per tal modo $x = 100\left\{20 - 21 . \left\{\frac{20}{21}\right\}^{10}\right\}$: espressione, il cui calcolo diviene speditissimo, qualora vi s' impieghino le dottrine esposte poc' anzi intorno all' uso de' logaritmi.

Si ha da esse $l. \left\{\frac{20}{21}\right\}^{10} = 10\,l.\,20 - 10\,l.\,21$ (178, 179) $= 13,0102999 - 13,2221929$. Affinchè il risultato della sottrazione non riesca negativo, s' aggiungano 4 unità alla caratteristica del primo dei due logaritmi: si otterà così 3,7881070 per logaritmo residuo, a cui corrisponde prossimamente il numero 6139. Dunque $0,6139 = \left\{\frac{20}{21}\right\}^{10}$;

ed in conseguenza . . . .
$x = 100.(20 - 21 \times 0,6139) = 710,81$ es. lire.

CAPITOLO X.

Alcune proprietà dell' equazioni.

182. *Equazione* dicesi qualunque eguaglianza tra le quantità cognite ed incognite in qual si sia modo mescolate tra loro, e si divide in due membri per mezzo del segno di eguaglianza $=$.

183. Il valore dell' incognita in una data equazione chiamasi radice dell' equazione. Se questo valore è positivo, la radice chiamasi positiva, e negativa se negativo.

184. Se il valore della radice non è affetto da alcun segno radicale la radice chiamasi razionale, ed irrazionale se ha alcun segno radicale. Che se il valore o in tutto, o in parte è imaginario, la radice ritiene la denominazione d' imaginaria per distinguerla dall' altre radici, che diconsi reali.

185. I coefficienti d' un equazione sono que' fattori, che in ciascun termine moltiplicano, o dividono l' incognita. Comunque questi sieno espressi, essi sempre si suppongono noti.

186. Un' equazione dicesi ordinata per la sua incognita, quando in essa già libera da' radicali, e dalle frazioni tutti i termini sono trasferiti nel primo membro, e la massima potenza dell' incognita forma il primo termine col segno $+$, e coll' unità per coefficiente, e le successive potenze della stessa incognita formano il secondo, il terzo, il quarto, ec. termine, e finalmente l' ultimo termine non contiene l' incognita, ed è perciò quantità costante. Tale si è l'equazione $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, la quale dicesi essere pure completa, perchè comprende tutte le potenze dell' incognita dalla massima fino alla minima. Se l' equazione fosse $x^4+bx^2+d=0$, cioè mancante del secondo e quarto termine, allora quest' equazione si direbbe incompleta.

187. Essendo *a* radice di un equazione, o sia il valore dell' incognita, sostituito questo in luogo dell' incogni-

ta renderà il primo membro dell' equazione $=0$. Di fatti se si ha l' equazione $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, e posto in vece di x il numero 2 che è radice della proposta, si avrà $8 - 6.4 + 11.2 - 6 = 0$, cioè $30 - 30 = 0$.

188. Viceversa, se una quantità a sostituita in luogo dell' incognita in una data equazione la rende $=0$, questa quantità a sarà una delle radici dell' equazion data: inoltre il primo membro della medesima equazione, si potrà dividere per l' incognita meno o più la radice, secondo che sarà positiva o negativa. Sia in fatti l' equazione di sopra $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, e dividendo per $x - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
x-2)\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & (x^2 - 4x + 3 \\
\underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad\quad & \\
-4x^2 + 11x - 6 & \\
\underline{-4x^2 + \ \ 8x} \qquad & \\
3x - 6 & \\
\underline{3x - 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

risulta o per residuo, e perciò la divisione succede esattamente.

189. In due maniere adunque si po-

trà vedere se una quantità a è radice di una data equazione, o sostituendola in luogo di x, o dividendo l'equazione per $x-a$; poichè se la divisione succede esattamente, potremo esser certi che a è una radice della proposta.

190. Tante radici ha perciò un'equazione, quanti fattori di primo grado; e siccome il numero di questi fattori è eguale al grado dell'equazione, ne segue che tante sono le radici di una equazione, quante unità contiene il di lei grado. Quindi ancora una equazione si può rappresentare per mezzo del prodotto de' suoi fattori, cioè se le radici saranno a, b, c, d, ec.; l'equazione potrà mettersi sotto la forma $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ec. $=0$.

191. Di quì apparisce, che se le radici sono tutte reali e negative, cioè $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, ec.; i termini dell'equazione $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ ec. $=0$ sono tutti positivi; se poi tutte le radici sono reali e positive, i termini dell'equazione $(x-a)(x-b)(x-c)$ ec. $=0$ sono alternativamente positivi e negativi.

192. E se una equazione ha tutti i

suoi termini positivi, non potrà avere alcuna radice reale positiva, perchè sostituita in luogo dell'incognita, il primo membro dell'equazione sarà composto di termini tutti positivi, e perciò non potrà annichilarsi.

193. Se poi i termini di una equazione sono alternativamente positivi e negativi, non potrà essa avere alcuna radice reale negativa; perchè sostituita questa in luogo dell'incognita i termini del primo membro saranno o tutti positivi, o tutti negativi, nè perciò il primo membro potrà andare a zero.

194. Qualunque sieno le radici d'un equazione, se si ordina quest'equazione per rapporto all'incognita, e che il primo termine sia positivo, e non abbia altro coefficiente che l'unità, si osserveranno le seguenti proprietà.

I. Il primo termine dell'equazione è l'incognita elevata alla potenza espressa per il numero delle radici.

II. Il secondo termine contiene l'incognita inalzata ad una potenza minore d'un unità, con un coefficiente, eguale alla somma delle radici prese con segni contrarj.

III. Il terzo termine comprende l' incognita elevata ad una potenza minore di due unità, con un coefficiente eguale alla somma dei prodotti che si ponno formare moltiplicando tutte le radici a due a due.

IV. Il quarto termine contiene l' incognita inalzata ad una potenza minore di tre unità, con un coefficiente eguale alla somma dei prodotti che si ponno fare moltiplicando a tre a tre tutte le radici prese con segni contrarj.

Così di seguito fino all' ultimo termine, che è il prodotto di tutte le radici prese con segni contrarj.

Sia per esempio l'equazione $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$, esprimendo a, b, c, d, le radici dell' equazione; effettuando la moltiplica, ed ordinando il prodotto finale per riguardo ad x, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \left.\begin{array}{r} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{r} +ab \\ +ac \\ +ad \\ +bc \\ +bd \\ +cd \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{r} -abc \\ -abd \\ -acd \\ -bcd \end{array}\right\} x + abcd \end{array}\right\} = 0$$

che verifica precisamente quanto si è sopra asserito.

195. Dunque un' equazione non ha secondo termine, quando tutte le radici supposte reali, le une sono positive, le altre negative, e che la somma delle positive è eguale alla somma delle negative. Un' equazione di cui tutte le radici sono imaginarie non avrà secondo termine, se la somma delle quantità reali che erano nell' espressioni delle radici è in parte positiva, in parte negativa, e che il risultamento si riduca a zero, le parti imaginarie si distruggono scambievolmente mediante l' addizione di ciascun pajo di radici.

196. Qualunque equazione può essere trasformata in un altra, che abbia per radici le radici della proposta, accresciute di una quantità data h. Sia l' equazione $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, e posto $x = z \pm h$, si avrà sostituendo $(z \pm h)^4 - A(z \pm h)^3 + B(z \pm h)^2 - C(z \pm h) + D = 0$, sviluppando, e ordinando nello stesso tempo, sarà

$$z^4 \left.\begin{array}{l} \pm 4h \\ - A \end{array}\right\} z^3 \left.\begin{array}{l} + 6h^2 \\ \mp 3Ah \\ + B \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} \pm 4h^3 \\ - 3Ah^2 \\ \pm 2Bh \\ - C \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{l} + h^4 \\ \mp 4h^3 \\ + Bh^2 \\ \mp Ch \\ + D \end{array}\right\} = 0$$

Quest' equazione avrà le radici eguali a quelle della proposta diminuite o aumentate di h, perchè $z = x \mp h$. È chiaro, che l' ultimo termine della trasformata si ottiene scrivendo nel primo membro della proposta h in luogo di x: il coefficiente del penultimo, se ciascun termine dell' ultimo si moltiplica per gli esponenti respettivi di h, poi si divide per h, e in questo mancherà il termine D, perchè in esso l'esponente di h è $= 0$: dal penultimo si otterranno gradatamente i termini seguenti nella medesima maniera, ma converrà inoltre dividerli respettivamente per 2, 3, 4, ec.

197 Dalla trasformata ottenuta apparisce, come da una data equazione si possa togliere il secondo termine. Sparirà il secondo termine, se sarà

$\pm 4h - A = 0$, o sia $h = \pm \dfrac{A}{4}$; e

perciò se ponghiamo $x = z \pm \frac{A}{4}$, nell' equazione risultante mancherà il secondo termine. In generale per far sparire il secondo termine da un equazione qualunque, basta fare l' incognita eguale ad una nuova incognita, $\pm$ il coefficiente del secondo termine della proposta, diviso per il maggior esponente dell' incognita. Il segno $+$ si deve prendere quando il coefficiente del secondo termine della proposta è negativo, ed il segno $-$ quando è positivo.

198. Qualunque equazione può trasformarsi in un altra che abbia per radici le radici della proposta moltiplicate o divise per una quantità h.

1.° Sia l'equazione $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$; posto $x = \frac{z}{h}$, sarà $z = hx$. Sostituendo, si avrà $z^4 - Ahz^3 + Bh^2z^2 - Ch^3z + Dh^4 = 0$, e questa trasformata avrà per radici le radici della proposta moltiplicate per h.

2.° Similmente nella stessa equazione fatto $x = hz$, sarà $z = \frac{x}{h}$, si avrà

la trasformata . . . .

$$z^4 - \frac{A}{h}z^3 + \frac{B}{h^2}z^2 - \frac{C}{h^3}z + \frac{D}{h^4} = 0,$$ che

avrà per radici quelle della proposta, ma divise per h.

199. Si osservi che tanto la prima, che la seconda trasformata, si sarebbero ottenute, moltiplicando nella prima i termini rispettivi per la progressione $1, h, h^2, h^3, h^4$, e nella seconda per la progressione $1, \frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^3}, \frac{1}{h^4}$.

Quest' osservazione fa di molto abbreviare l' operazione, mentre senza fare la sostituzione, si potrà moltiplicare ciascun termine della proposta per una progressione geometrica crescente, o decrescente, secondo che si vorranno le radici moltiplicate o divise per una data quantità h.

200. Si debba adesso trasformare un' equazione qualunque in un' altra, in modo che le radici positive conservando il loro valore divengano negative, e le negative si cangino in positive. Si faccia $x = -y$, e sarà anche $y = -x$;

onde dopo questa sostituzione, le radici acquisteranno segni diversi. In fatti, sia l'equazione $x^3-6x^2+11x-6=0$, che ha per radici 1, 2, 3, facendo $x=-y$, si avrà $-y^3-6y^2-11y-6=0$, o sia $y^3+6y^2+11y+6=0$; e le radici di quest equazione sono -1, -2, -3. Dunque si vede che senza fare la sostituzione $x=-y$, bastava cangiare i segni dei termini in posto dispari; viceversa, se l'equazione fosse stata di grado pari, si sarebbero dovuti cangiare i segni dei termini in posto pari. Ma poichè salva l'equazione, si possono mutare i segni a tutti i termini, anche nel primo caso la cosa si riduce a cangiare i segni de' termini situati in posto pari.

CAPITOLO XI.

Dell' equazioni di secondo grado.

201. Ogni equazione determinata di secondo grado, si può ridurre alla forma $x^2+ax+b=0$, essendo x l'incognita, a e b quantità cognite sempli-

ci o composte, positive o negative. Sia per esempio l' equazione $mx^2 + n^2x + p^3 = q^3 - fgh$: si comincierà a trasporre i due termini q, e $-fgh$ dal secondo membro nel primo; lo che darà $mx^2 + n^2x + p^3 - q^3 + fgh = o$; indi si dividerà per m, e si avrà l' equazione $x^2 + \frac{n^2}{m}x + \frac{p^3 - q^3 + fgh}{m} = o$.

Posto $a = \frac{n^2}{m}$, $b = \frac{p^3 - q^3 + fgh}{m}$, avremo ridotta la nostra equazione alla forma cercata.

202. Se si avesse $mx^2 = kx^2 + pqx + h^3 - frq$, si metterebbe tutto nel primo membro, e si avrebbe $(m-k)x^2 - pqx - h^3 + frq = o$, e dividendo per $m-k$, si avrà $x^2 - \frac{pqx}{m-k} - \frac{(h^3 - frq)}{m-k} = o$: equazione che si riferisce alla formola $x^2 + ax + b = o$, supponendo $-\frac{pq}{m-k} = a$, $-\frac{(h^3 - frq)}{m-k} = b$. Si farà lo stesso per tutte le altre equazio-

nì di questo grado. Quindi il problema della risoluzione delle equazioni del secondo grado, si riduce a saper ricavare dall'equazione $x^2 + ax + b = 0$, il valore dell'incognita x.

203. Siccome le quantità a e b possono essere tutto ciò che si vuole, osservo, 1.° che se si suppone $b = 0$, si avrà $x^2 + ax = 0$. Il primo membro di questa espressione è evidentemente il prodotto de' fattori x, $x + a$; e l'equazione si verifica, qualunque dei due si supponga $= 0$, sia il primo, sia il secondo. Nel primo caso, il valore dell'incognita x è zero; nel secondo, l'equazione da risolversi è $x + a = 0$: la quale è del primo grado, e dà $x = -a$.

2.° Se si suppone $a = 0$, il termine ax svanirà, e si avrà semplicemente $x^2 + b = 0$, ovvero $x^2 = -b$. Dunque, cavando la radice quadrata da ciascun membro, si avrà $x = \pm\sqrt{-b}$; e per conseguenza l'incognita x sarà determinata. Metto il doppio segno $\pm$ innanzi a $\sqrt{-b}$, poichè, come abbiamo veduto l'una e l'altra quantità $+\sqrt{-b}$, e $-\sqrt{-b}$, essendo moltiplicata per se stessa, dà egualmente $-b$, o sia x^2.

Si potrebbe mettere altresì il doppio segno innanzi ad x; ma ciò non produrrebbe alcun nuovo risultato; perciocchè se voi prendete $+x=\pm\sqrt{-b}$, questa espressione è la medesima di quella che si è data di sopra; e se prendete $-x=\pm\sqrt{-b}$, avrete, cambiando tutti i segni, $x=\mp\sqrt{-b}$: il che si riduce al primo risultato.

Si vede adunque, che l'incognita ha due valori. Questi valori si chiamano le *radici* dell'equazione, in questo senso che ciascuna di esse essendo posta a vicenda in luogo dell'incognita, la totalità de' termini dell'equazione si riduce a zero, per l'opposizione de' loro segni; ovvero ancora, perchè l'equazione $x^2+b=0$, può essere considerata come il prodotto . . . . $(x-\sqrt{-b})\times(x+\sqrt{-b})=0$. Di fatti, se voi mettete nell'equazione $x^2+b=0$, nel luogo di x^2, il quadrato di $+\sqrt{-b}$, o quelli di $-\sqrt{-b}$, avrete egualmente $-b+b=0$; e parimente se effettuate il prodotto indicato $(x-\sqrt{-b})\times(x+\sqrt{-b})=0$, troverete $x^2+b=0$.

Allorchè la quantità b è negativa, i

due valori di x, o sia le due radici dell' equazione sono reali; perciocchè allora $-b$ è una quantità positiva, la cui radice seconda è reale. Ma se la quantità b è positiva, allora $-b$ è una quantità negativa, la cui radice seconda è impossibile o sia *immaginaria*.

Passo al problema generale, in cui nè a nè b non sono più zero.

204 Problema I. *Risolvere l' equazione generale* $x^2 + ax + b = 0$?

Traspongo primieramente il termine $+b$; il che dà $x^2 + ax = -b$: in seguito osservo, che se si forma il quadrato d' un binomio, quale è $x + h$, questo quadrato è $x^2 + 2hx + hh$: dal che vedo, paragonandolo termine a termine col primo membro dell' equazione precedente, cioè a dire, facendo

$$x^2 = x^2,\ 2hx = ax,\ \text{o sia}\ h = \frac{a}{2},$$

vedo dico, che il primo membro in questione diverebbe un quadrato perfetto, se vi si aggiungesse il quadrato

di h, o sia di $\frac{a}{2}$, cioè il quadrato

della metà del coefficiente che affetta l' incognita nel secondo termine dell' equazione proposta. Vi aggiungo dunque questo quadrato; ed affinchè susista l' equazione, lo aggiungo eziandio al secondo membro: con ciò si avrà $x^2 + ax + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - b$, equazione il cui primo membro è un quadrato perfetto, cioè quello di $x + \frac{a}{2}$. Quindi, levando la radice quadrata da questo membro, ed indicando quella del secondo, si avrà $x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - b\right)}$, ove l' incognita x si ritrova ridotta al primo grado; di modo che trasponendo il termine $\frac{a}{2}$, si avrà $x = -\frac{a}{2}$ $\pm\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - b\right)}$, ed x sarà liberata.

Si vede, che a motivo del doppio segno che affetta il radicale, l' incogni-

ta ha due valori: vale a dire, che la totalità dei termini componenti il primo membro dell' equazione $x^2+ax+b=0$, si ridurrà egualmento a zero, sia che si metta, in vece di x, $-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-b\right)}$, sia che vi si metta $-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-b\right)}$: che cioè l' equazione $x^2+ax+b=0$, può essere considerata come il prodotto $\left(x+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-b\right)}\right)\times\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-b\right)}\right)=0$, come puossi verificare effettuando questo prodotto.

Allorchè la quantità $\frac{aa}{4}-b$ è positiva, i due valori di x, o sia le due radici dell' equazione, sono reali; poichè le loro parti $-\frac{a}{2}$ e $\sqrt{\left(\frac{aa}{4}-b\right)}$ sono

reali. Ora siccome $\frac{aa}{4}$ è sempre positiva, qualunque sia il segno di a, è chiaro che $\frac{aa}{4} - b$ e sempre positiva, quando b è negativa. Al contrario, le due radici dell' equazione saranno immaginarie, quando la quantità $\frac{aa}{4} - b$ sarà negativa; perchè allora la radice di questa quantità essendo immaginaria, unendola positivamente o negativamente con $-\frac{a}{2}$, essa renderà tutto immaginario. Ora affinchè $\frac{aa}{4} - b$ sia negativa, fa d' uopo che b sia positiva, e che sia inoltre $\frac{aa}{4} < b$.

Se nell' ipotesi di b positiva, fosse $\frac{aa}{4} = b$, il radicale svanirebbe, ed i

due valori di x diverrebbero eguali, essendo ciascuno $-\frac{a}{2}$: di fatti, l'equazione $x^2+ax+b=0$, diventerebbe in tal caso $xx+ax+\frac{a^2}{4}=0$, o sia $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=0$, ovvero $\left(x+\frac{a}{2}\right)\times\left(x+\frac{a}{2}\right)=0$.

205. Si potrebbe pure risolvere l'equazione $x^2+ax+b=0$, con il metodo esposto (199), cioè con far sparire il secondo termine dell'equazione. Di fatti posto come in quel paragrafo $x=y+h$, si avrà $y^2+(2h+a)y+h^2+ah+b=0$; e per determinare h, si farà $2h+a=0$, e $h=-\frac{a}{2}$. Quindi $y^2-\frac{a^2}{4}+b=0$, e $y=\pm\sqrt{\frac{aa}{4}-b}$; perciò $x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$; come si è trovato con il metodo precedente.

206. Problema II. *Trovare un nume-*

ro tale, che essendo aggiunto tre volte al suo quadrato, la somma faccia 108? Sia x il numero cercato: si avrà l'equazione $x^2 + 3x = 108$. Aggiungiamo da una parte, e dall' altra il quadrato di $\frac{3}{2}$, cioè a dire, il quadrato della metà del coefficiente del termine che contiene x; avremo $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 108 + \frac{9}{4}$: equazione, il cui primo membro è il quadrato di $x + \frac{3}{2}$. Cavando adunque la radice da ciascun membro, si avrà $x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{(108 + \frac{9}{4})}$, ovvero riducendo tutta la quantità radicale al medesimo denominatore, ed effetuando l'addizione, $x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{441}{4}}$. Ora la frazione $\frac{441}{4}$ ha per radice esatta $\frac{21}{2}$. Quindi si avrà $x + \frac{3}{2} = \pm\frac{21}{2}$.

Onde se ne ricavano questi due valori $x = 9$, $x = -12$: che entrambi risolvono egualmente il problema. Imperciocchè se al quadrato del numero positivo 9, che è 81, si aggiunge il triplo dello stesso numero che è 27, la somma sarà 108; e se al quadrato del numero negativo -12, che è 144, si aggiugne il triplo dello stesso numero che è -36; la somma sarà $144 - 36$, o sia ancora 108.

207 Da quest' esempio si vede un vantaggio dell' Algebra; ed è che una medesima equazione dà non solo la soluzione del problema particolare che si cerca di risolvere nel formarla, ma ancora la soluzione di tutti i problemi che hanno delle condizioni simiglianti. Così nel proporre il problema precedente, si è potuto avere in vista soltanto il trovare un numero positivo che ne adempia le condizioni; ma l' equazione $x^2 + 3x = 108$, fa vedere che si possono adempire egualmente queste condizioni, con prendere un numero negativo.

208. Problema III. *Dividere il numero 24 in due parti tali, che il loro prodotto sia 135?*

Sia x la prima parte, e per conseguenza $24 - x$ la seconda. Si avrà l'equazione, $x(24 - x) = 135$, o sia $x^2 - 24x = -135$. Aggiugniamo da una parte, e dall'altra il quadrato di 12, metà del coefficiente di x; avremo $x^2 - 24x + 144 = 144 - 135 = 9$. Cavando la radice quadrata da ciascun membro, si avrà $x - 12 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$; il che dà per x questi due valori $x = 15$, $x = 9$. Nel primo caso le due parti del numero 24, sono 15 e 9; e nel secondo, esse sono 9 e 15. I due casi si riducono per conseguenza ad un solo.

209 PROBLEMA IV. *Una botte piena di liquore ha tre orifizj* A, B, C; *essa può vuotarsi pei tre orifizj insieme in sei ore; per l'orifizio* B *solo, si vuoterebbe ne' tre quarti del tempo che metterebbe a vuotarsi per* A *solo; e per* C *in un tempo che è maggiore di* 5 *ore del tempo per* B. *Si domanda in quanto tempo la botte si vuoterà per ciascuna di queste aperture separatamente?*

(La velocità degli efflussi è supposta uniforme, e sempre la stessa in tutti i casi).

Rappresentiamo con T la totalità del

liquore contenuto nella botte, e chiamiamo x il numero delle ore che metterà la botte a vuotarsi per l'orifizio A solo. Il tempo per B solo, sarà $\frac{3}{4}\ x$, ed il tempo per C solo, sarà $\frac{3}{4}\ x+5$. Ora è chiaro, che dividendo T per ciascuno di questi tempi, i quoti esprimeranno le quantità di liquore che uscirebbero, durante un' ora per ciascuna delle tre aperture proposte. Dunque la quantità di liquore che esce durante un'ora, per tutte queste tre aperture insieme, è $\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}$, e la quantità che esce in sei ore, per queste tre medesime aperture, è . . $6\left(\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}\right)$. Ora per ipotesi, quest'ultima quantità è T. Quindi si ha l'equazione $6\left(\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}\right)=T$; ovvero (dividendo tutto per T) . . . $6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x+5}\right)=1$; o sia (os-

servando che $\frac{1}{x}=\frac{3}{3x}$; che $\frac{1}{\frac{3}{4}x}=\frac{4}{3x}$;

che $\frac{1}{\frac{3}{4}x+5}=\frac{4}{3x+20}$), $6\left(\frac{7}{3x}+\frac{4}{3x+20}\right)=1$.
Facendo sparire le frazioni, e riducendo, si troverà $x^2-\frac{46}{3}x=\frac{840}{9}$. Aggiugnendo dall'una e dall'altra parte il quadrato di $\frac{23}{3}$, si avrà $x^2-\frac{46}{3}x+\frac{529}{9}=\frac{1369}{9}$. Cavando la radice quadrata da ambe le parti, si avrà $x-\frac{23}{3}=\pm\frac{37}{3}$, cioè a dire $x=20$, o $x=-\frac{14}{3}$.

Se si prende il primo valore di x, il tempo per B, che è $\frac{3}{4}x$, sarà 15, ed il tempo per C, che è $\frac{3}{4}x+5$, sarà 20. Quindi i tre tempi cercati saranno 20 ore, 15 ore, 20 ore.

Se si prende il secondo valore $x=-\frac{14}{3}$, il tempo per B sarà $-\frac{7}{2}$, ed

il tempo per $C + \frac{3}{2}$. Allora i primi due tempi essendo negativi, devono esser presi in un senso contrario a quello che è loro attribuito dall'enunziato del problema. Quindi, in vece di supporre che durante questi due tempi, la botte *perda* dell'acqua, bisogna supporre che ne *riceva*. La conseguenza che si deve ricavare da questa soluzione, si è che se la botte si vuota in 6 ore, ricevendo dell'acqua per le due aperture A e B, mentre ne perde per l'apertura C sola; si empirà in $\frac{14}{3}$ d'ora per l'apertura A sola; si empirà parimente in $\frac{7}{2}$ d'ora per l'apertura B; e si vuoterà al contrario, in $\frac{3}{2}$ d'ora, per l'apertura C sola.

210. Problema V. *Trovare sopra la linea che congiunge due lumi* A *e* B*, il punto in cui essi illuminano egualmente un medesimo oggetto; supponendo questo fatto di Fisica, che l'illuminazione ricevuta da un oggetto, è in ragione inversa del quadrato della sua distanza dal corpo luminoso: vale a dire, che l'illuminazione alla distanza* 1 *dal corpo luminoso, supponendosi*

espressa da 1, *alle distanze* 2, 3, ec. *è quattro, nove*, ec. *volte minore, cioè espressa da* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ ec.

Chiamiamo a la distanza dei due lumi; x la distanza dell' oggetto illuminato dal lume più forte, che suppongo essere A; e per conseguenza $a-x$, la sua distanza dal secondo B, nell' ipotesi che l' oggetto sia situato fra i due lumi. Supponiamo che alla distanza data 1, l' illuminazione prodotta da A, sia m, e che l' illuminazione prodotta da B, sia n. Segue dal principio di Fisica, di cui abbiamo parlato più sopra, che alla distanza x, l' illuminazione prodotta dal primo lume, sarà $\frac{1 \times m}{x^2}$, e l' illuminazione prodotta dal secondo, alla distanza $a-x$, sarà $\frac{1 \times n}{(a-x)^2}$. Ora (ip.) queste due illuminazioni devono essere uguali; dunque si avrà $\frac{m}{x^2} = \frac{n}{(a-x)^2}$. Si potrebbe risolvere questa equazione, col fare sparire le frazioni, e col ridurla alla forma dell' ar-

ticolo 204; ma si giungerà più speditamente a conoscere x, col cavare tutto di seguito la radice quadrata da ciascun membro. Con ciò si avrà $\frac{\sqrt{m}}{x} = \pm\frac{\sqrt{n}}{a-x}$; ovvero $(a-x)\sqrt{m} = \pm x\sqrt{n}$.

Dunque $x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}\pm\sqrt{n}}$.

Siccome si è supposto $m > n$, i due valori di x sono positivi, e devono per conseguenza essere presi dalla parte di A verso B. Inoltre, se si prende per denominatore $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, si avrà $x<a$; e per conseguenza il punto cercato è situato fra i due lumi, come si è supposto nello stabilire il calcolo. Ma se si prende per denominatore $\sqrt{m}-\sqrt{n}$, si avrà $x > a$; e allora il punto domandato è situato al di là di B, e distante da A, della quantità $\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$.

Sopra di che bisogna osservare che si sarebbe potuto trovare questo punto pel primo, e l'altro pel secondo, se in

vece di porre l'equazione $\frac{m}{x^2}=\frac{n}{(a-x)^2}$,

si fosse posta l'equazione $\frac{m}{x^2}=\frac{n}{(x-a)^2}$,

che appunto è relativa al caso di cui trattasi, cioè all'ipotesi che l'oggetto sia collocato fuori dell'intervallo compreso fra i due lumi. Questa supposizione avrebbe dato in effetto l'equazion

finale $x=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}\mp\sqrt{n}}$.

Se fosse $m=n$, o sia se i due lumi fossero uguali, si avrebbe $\frac{a}{2}$ per uno dei valori di x, il che soddisfa evidentemente al problema, e per un altro valore, $\frac{a\sqrt{m}}{0}$. Questo secondo valore è infinito, perchè una quantità finita come $a\sqrt{m}$, essendo divisa per zero, che si può riguardare come una quantità infinitamente piccola, da un quoto infinitamente grande. In questo caso l'oggetto illuminato dev'essere ad una

distanza infinita dai due lumi; il che soddisfa ancora al problema. Imperciocchè la loro distanza deve essere riguardata come nulla per rapporto ad $\frac{a\sqrt{}^{-}m}{o}$:

dal che ne segue, che l'oggetto può essere supposto egualmente lontano dai due lumi uguali, e per conseguenza egualmente illuminato da ciascuno di essi.

211. Problema VI. *Conoscendo la somma di due numeri e quella dei loro quadrati, trovare questi due numeri?*

Siano x ed y i due numeri cercati, a la loro somma, bb la somma de' loro quadrati. Si avranno le due equazioni $x+y=a$, $xx+yy=bb$. La prima dà $y=a-x$, ed $yy=aa-2ax+xx$. Sostituendo questo valore di yy nella seconda, si avrà $xx+aa-2ax+xx=bb$, ovvero $2xx-2ax=bb-aa$, o sia $x^2-ax=\frac{bb-aa}{2}$: donde si ricava . . . .

$x=\frac{a\pm\sqrt{}^{-}(2bb-aa)}{2}$; ed (a motivo

di $y=a-x$), $y=\frac{a\mp\sqrt{(2bb-aa)}}{2}$.

Supponiamo per esempio $a=7$, $b=5$.

Si avrà $x=\frac{7\pm1}{2}$, $y=\frac{7\mp1}{2}$; cioè a dire $x=4$, $y=3$; ovvero $x=3$, $y=4$.

Per secondo esempio, supponiamo $a=20$, $b=12$, o sia $bb=144$. Si avrà

$$x=10\pm\frac{\sqrt{-112}}{2}=10\pm\sqrt{-28},$$

$y=10\mp\sqrt{-28}$. Ora la parte radicale $\pm\sqrt{-28}$ è immaginaria; e questa parte, unita col numero 10, rende tutto immaginario. Quindi i due valori di x e di y sono immaginarj. Egli è dunque impossibile o sia è assurdo di supporre che la somma de' due numeri faccia 20, e la somma de' loro quadrati 144. Questa assurdità che non salta agli occhi, è posta in evidenza dal calcolo; e questo è un vantaggio prezioso dell' Algebra. Ella non si limita già a dare lo scioglimento d' una questione, ne' casi in cui questa questione è possibile; ella fa eziandio co-

noscere i casi in cui una questione è impossibile; perciocchè allora la traduzione algebrica del problema conduce a risultati immaginarj, cioè assurdi.

Si domanderà forse come mai nel secondo esempio, essendo il valore di x immaginario, il secondo membro dell'equazione primitiva $xx-20x=-128$, che allora si ritrova, sia nondimeno una quantità reale? Ciò avviene, perchè le parti immaginarie che entrano nel secondo membro, si distruggono scambievolmente per l'opposizione dei segni che le affettano. Di fatti, poichè $x=10\pm\sqrt{-28}$, si avrà $x^2=100-28\pm20\sqrt{-28}$; e $-20x=-200\mp20\sqrt{-28}$. Per conseguenza $x^2-20x=100-28-200\pm20\sqrt{-28}\mp20\sqrt{-28}$; che si riduce a -128. La stessa osservazione ha luogo per y.

Da ciò rilevasi nel tempo stesso, che le radici immaginarie vanno sempre *a due a due;* perciocchè la radice quadrata indicata di -28, è egualmente $\pm\sqrt{-28}$; il doppio segno accenna due radici.

212. Problema VII. *Risolvere l'equazione* $n^2 + \frac{(2a-d)n}{d} - \frac{2s}{d} = 0$.

Questa questione serve a trovare in una progressione aritmetica, il numero dei termini, allorchè si conosce il primo termine, la differenza e la somma della progressione. Ora per risolvere l'equazione proposta, traspongo primieramente il termine $-\frac{2s}{d}$, ed ho $n^2 + \frac{(2a-d)n}{d} = \frac{2s}{d}$; donde si ricava (204), $n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \frac{\sqrt{[(2a-d)^2 + 8ds]}}{2d}$.

Supponiamo, per esempio $a=3$, $d=2$, $s=80$; si avrà $2a-d=4$, $8ds=1280$, $(2a-d)^2 + 8ds = 1296$, la cui radice quadrata è 36. Dunque $n = -\frac{4}{4} \pm \frac{36}{4}$.

Si deve prendere soltanto il segno + che affetta l' ultimo termine, perchè il numero cercato n è positivo:

si avrà dunque $n = \frac{36-4}{4} = \frac{32}{4} = 8$.

213. Problema VIII. *Conoscendo la somma di tre numeri che sono in progressione geometrica, e la somma de' loro quadrati, trovare questi tre numeri?*

Siano x, y, z i tre numeri cercati; a la loro somma; bb quella de' loro quadrati. Si avranno per le condizioni del problema, le tre equazioni seguenti (la terza delle quali è fondata sopra la proporzione continua $\div x : y : z$, che ha luogo fra i tre numeri): . . . .

$x+y+z=a$; $xx+yy+zz=bb$; $xz=yy$.

Ricaviamo dalla prima, $z=a-x-y$, e mettiamo questo valore nelle due altre; troveremo queste due, $2xx+2yy+aa-2ax-2ay+2xy=bb$, $ax-xx-xy=yy$: le quali non contengono più che le due incognite x ed y. Prendo da ciascuna di queste due equazioni un valore di x. La prima mi dà $xx-(a-y)x = \frac{bb-aa-2yy+2ay}{2}$, e per conse-

guenza $x = \frac{a-y}{3}$ . . . .

$\pm\sqrt{\left\{\frac{bb-aa-2yy+2ay}{2} + \frac{(a-y)^2}{4}\right\}}$.

La seconda dà $xx-(a-y)x=-yy$, e per conseguenza $x=\frac{a-y}{2}$ . . . .

$\pm\sqrt{\left\{\frac{(a-y)^2}{4}-yy\right\}}$. Ora $x=x$. Dunque si avrà, cancellando la quantità $\frac{a-y}{2}$ che è la stessa ne' due membri, $\pm\sqrt{\left\{\frac{bb-aa-2yy+2ay}{2}+\frac{(a-y)^2}{4}\right\}}$

$=\pm\sqrt{\left\{\frac{(a-y)^2}{4}-yy\right\}}$. Ed elevando ciascun membro al quadrato, e facendo le riduzioni, e liberando y, si troverà $y=\frac{aa-bb}{2a}$. Mettiamo questo valore di y nell' equazione $x=\frac{a-y}{2}$

$\pm\sqrt{\left\{\frac{(a-y)^2}{4}-y^2\right\}}$; troveremo . . .

$$x=\frac{aa+bb\pm\sqrt{(10a^2b^2-3a^4-3b^4)}}{4a}.$$

Finalmente sostituiamo i valori di x e di y nell'equazione $z=a-x-y$; ed avremo $z=\frac{aa+bb\mp\sqrt{(10a^2b^2-3a^4-3b^4)}}{4a}$.

214. Si sarebbe potuto giugnere ai medesimi valori di y, x, z in un modo più semplice. Imperciocchè se dopo aver ritrovato le due equazioni: $2xx+2yy+aa-2ax-2ay+2xy=bb$, $ax-xy-xx=yy$, noi moltiplichiamo la seconda per 2, e la aggiungiamo alla prima, indi cancelliamo i termini che si distruggono per l'opposizione dei segni, troveremo $y=\frac{aa-bb}{2a}$. Il rimanente del calcolo si compie come prima.

215. Vi è ne' gradi superiori al secondo una classe molto estesa di equazioni che si risolvono col metodo del secondo grado. Queste equazioni possono essere comprese sotto la formola

generale $x^{2m}+ax^m+b=0$; essendo x l'incognita, a e b quantità cognite, m un numero intero positivo. L'esponente di x nel primo termine è doppio come si vede, dell'esponente della stessa lettera nel secondo termine. Di fatti, se si suppone $x^m=z$ (essendo z una nuova incognita), l'equazione $x^{2m}+ax^m+b=0$, diventerà $z^2+az+b=0$, che è del secondo grado, e dalla quale si ricava $z=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left\{\frac{aa}{4}-b\right\}}$. Conoscendo z, si avrà x cavando la radice m da z.

Supponiamo per esempio, $m=2$, cioè che abbiasi l'equazione del quarto grado $x^4+ax^2+b=0$: si farà $x^2=z$; e si troverà z, o sia $x^2=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left\{\frac{aa}{4}-b\right\}}$. Dunque, levando la radice quadrata $x=\pm\sqrt{\left[-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left\{\frac{aa}{4}-b\right\}}\right]}$. L'incognita ha come si vede, quattro valori.

Per secondo esempio, sia $m = 3$, ovvero siavi l'equazione del sesto grado $x^6 + ax^3 + b = 0$: si farà $x^3 = z$, ed avendo primieramente trovato z o sia $x^3 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{aa}{4} - b\right\}}$, si caverà la radice cubica, e si avrà . . .
$x = \sqrt[3]{\left[-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{aa}{4} - b\right\}}\right]}$. Vedremo più sotto che un' equazione di questa forma $x^3 = M$, ha tre radici; per conseguenza nella nostra equazione $x^6 + ax^3 + b = 0$, l'incognita x ha sei valori.

216. Porremo dei problemi con le soluzioni, onde possano i giovani studiosi esercitarsi nel maneggio dei calcoli algebraici, e formare il criterio di porre i problemi in equazione.

I. Dividere il numero 10 in due parti di modo, che sottraendo dalla maggiore la sua radice presa due volte, ed aggiungendo alla minore la radice sua parimente moltiplicata per due, risultino quantità eguali. *Ris.* Le due parti sono 1, e 9.

II. Alcuni Negozianti scielgono un Agente in Venezia. Ciascuno di essi somministra per il commercio che hanno ideato, dieci volte tanti scudi quanti sono gli associati. L' interesse dell' Agente è fissato per ogni cento scudi, due volte tanti scudi quanti associati vi sono. Se si moltiplica la $\frac{1}{100}$ parte del guadagno totale per $2\frac{2}{9}$, si trova il numero degli associati. *Ris.* Gli associati erano 15, e ciascuno ha contribuito 150 scudi.

III. Si cerca un numero di cui la metà, moltiplicata per un terzo faccia 24? *Ris.* Il numero è ± 12.

IV. Si cerca un numero tale, che aggiuntovi 5, e sottrattovi lo stesso 5, il prodotto della somma per la differenza sia $= 96$. *Ris.* Il numero è ± 11.

V. Due numeri tali, che uno sorpassa l'altro di 6. ed il loro prodotto è eguale a 91. *Ris.* I due numeri sono 7, e 13.

VI. Trovare due numeri che sieno in proporzione doppia, e tali che aggiunta la loro somma con il prodotto, faccia 90. *Ris.* Uno dei numeri è 6, oppure $-7\frac{1}{2}$.

VII. Un mercante che ha comprato un cavallo per un certo numero di scudi, lo rivende per 119 scudi, e guadagna tanto per cento scudi, quanto gli è costato il cavallo. *Ris.* Il cavallo è costato 70 scudi.

VIII. Tizio ha comprato più pezze di drappo per scudi cento ottanta. Se per la medesima somma avesse avuto tre pezze di più, avrebbe avuto ciascuna pezza a tre scudi di meno. Si cerca il numero delle pezze. *Ris.* Le pezze sono state 12, ed il prezzo di ciascuna quindici scudi.

IX. Due mercanti vendono ciascuno una certa stoffa; il secondo ne vende tre metri di più del primo, e tirano insieme 35 scudi. Il primo dice che avrebbe ricavato dalla stoffa del secondo 24 scudi; ed il secondo dice che ne avrebbe ricavato dalla stoffa del primo 12 scudi e mezzo. Quanti metri di stoffa aveva ciascuno? *Ris.* La questione ha due soluzioni. In un caso il primo mercante avea 15 metri; ed il secondo 18: nel secondo caso il primo mercante avea 5 metri, e l'altro 8.

CAPITOLO XII.

Dell' equazioni di terzo grado.

217. La formola generale delle equazioni determinate del terzo grado è $y^3 + ay^2 + by + c = 0$: essendo y l' incognita, ed a, b, c delle quantità date. Di fatti, qualunque sia l' equazione determinata del terzo grado, di cui si tratta, si potranno mettere tutti i termini da una stessa parte; dividere tutto pel moltiplicatore di y^3, se questo moltiplicatore è diverso da 1; in seguito rappresentare con a il coefficiente di y^2, con b quello di y, e con c il risultato di tutti i termini cogniti.

218. Essendo date le quantità a, b, c, osservo primieramente che se si suppone $c = 0$, si avrà $y^3 + ay^2 + by = 0$; espressione che si può riguardare o come il prodotto di $y = 0$ per la quantità $y^2 + ay + b$, ovvero come il prodotto della quantità y per l' equazione del secondo grado $y^2 + ay + b = 0$, la

quale dà $y = \frac{-a \pm \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$. Quindi l' equazione $y^3 + ay^2 + by = 0$, ha tre radici; cioè 0, $\frac{-a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, $\frac{-a - \sqrt{(aa + 4b)}}{2}$: vale a dire, che mettendo una qualùnque di queste tre quantità in luogo di y, si avrà egualmente $y^3 + ay^2 + by = 0$, come è facile di verificare col calcolo.

219 Supponiamo che a e b siano zero: l' equazione generale $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, diventerà $y^3 + c = 0$, o sia $y^3 = -c$. Cavando la radice cubica da ambe le parti, si avrà $y = \sqrt[3]{-c}$: espressione sempre reale (essendo supposta c reale), e che sarà positiva, se c è negativo; negativa se c è positivo.

Da un altro canto, se si divide l' equazione $y^3 + c = 0$, per $y - \sqrt[3]{-c}$, ovvero (supponendo, per abbreviare un poco le espressioni $c = m^3$, $y^3 + m^3 = 0$,

per $y+m$; si troverà per quoto l' equazione del secondo grado $y^2-my+m^2=0$, la quale dà $y=\frac{m\pm m\sqrt{-3}}{2}$, che sono due altre radici dell' equazione proposta; ma queste due nuove radici sono immaginarie.

Dunque si avrà del pari $y^3+m^3=0$, sia che si metta, in vece di y, o la quantità $-m$, o $\frac{m+m\sqrt{-3}}{2}$, o $\frac{m-m\sqrt{-3}}{2}$, come lo mostra il calcolo.

220. I due casi precedenti non hanno difficoltà alcuna. Entro adesso a risolvere l' equazione generale $y^3+ay^2+by+c=0$, senza supporre che alcuna delle quantità a, b, c sia zero. Ma per ciò che si disse nel cap X. potremo semplificare quest' equazione facendo sparire il secondo termine. Di fatti posto $y=x-\frac{a}{3}$, avremo un equazione della forma che si va a risolvere nel seguente

221 PROBLEMA I. *Risolvere l' equazione* $x^3 + px + q = 0$?

Egli è evidente, che quando avrò trovato il valore di x, il quale conterrà nella sua espressione le lettere p e q, avrò eziandio il valore di y, espresso in a, b, c; poichè non si dovrà per ciò che mettere, in vece di p, il suo valore $b - \frac{a^2}{3}$; in vece di q, il suo valore $\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$; ed in seguito sottrarre dall' espressione di x la quantità $\frac{a}{3}$, a motivo dell' equazione $y = x + m = x - \frac{a}{3}$. Se il valore di x è reale, lo sarà pur quello di y: se il valore di x è immaginario, lo sarà egualmente quello di y; poichè sottraendo da una quantità immaginaria una quantità reale, non si può avere che un residuo immaginario.

Avendo scritta l' equazione $x^3 + px + q = 0$ sotto la forma $x^3 = -px - q$,

prendo una nuova incognita z, e aggiungo a ciascun membro la quantità $3x^2z+3xz^2+z^3$; il che dà . . . .

$$(M)\; x^3+3x^2z+3xz^2+z^3=3zx^2+3z^2)x+z^3 \\ -p\;)\;-q.$$

equazione, il cui primo membro è il cubo del binomio $x+z$. Ora siccome l' incognita z è arbitraria, possiamo supporre che questa incognita sia tale che la parte $3zx^2+(3z^2-p)x$ del secondo membro svanisca; cioè a dire, formi l'equazione parziale $3zx^2+(3z^2-p)x=0$, o sia $3zx+3z^2-p=0$; donde si cava $x+z=\frac{p}{3z}$, ed $(x+z)^3=\frac{p^3}{27z^3}$.

Ma da un altro canto, l'equazione (M) dà (a motivo che la parte $3zx^2+(3z^2-p)x$ del secondo membro è zero) $(x+z)^3=z^3-q$. Uguagliando fra loro i due valori di $(x+z)^3$, si avrà $\frac{p^3}{27z^3}=z^3-q$, ovvero $z^6-qz^3=\frac{p^3}{27}$: equazione che si risolve col metodo del secondo grado, e che dà $z^3=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left\{\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right\}}$, e

quindi, cavando la radice cubica, $z = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$.

Sostituiamo, in vece di z e z^3, i loro valori nell' equazione $x+z=\sqrt[3]{(z^3-q)}$, o sia $x=\sqrt[3]{(z^3-q)}-z$; avremo

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right\}}\right)} - \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right\}}\right)},$$

ovvero (prendo semplicemente i segni superiori che affettano il radicale quadrato, atteso che i segni inferiori darebbero il medesimo risultato pel valore di x; ed osservando che $-\sqrt[3]{A}$ è la stessa cosa di $\sqrt[3]{-A}$)

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left\{\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right\}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left\{\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right\}}\right)}.$$

Questa espressione è una delle radici dell' equazione $x^3 + px + q = 0$. Vi sono ancora due altre radici che trattasi di trovare.

Per giungervi in una maniera comoda, rappresentiamo le due quantità radicali cubiche che entrano nel valore della radice trovata colle due lettere g ed h, cioè a dire, supponiamo

$$g = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left\{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right\}}\right)};$$

$$h = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left\{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right\}}\right)}.$$

Moltiplicando insieme queste due equazioni, e considerando che un prodotto, come $(A + B) \times (A - B)$, è $= AA - BB$, si vedrà tutto d' un tratto che $gh = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}$. Onde $p = -3gh$.

Innalzando ciascuna delle medesime equazioni al cubo, poi sommandole si avrà $g^3 + h^3 = -q$, o sia $q = -g^3 - h^3$.

Mettiamo i valori che abbiamo trovati per p e q, nell' equazione $x^3 +$

$px+q=0$; essa diventerà $x^3-3ghx-g^3-h^3=0$

Ciò posto, poichè si ha $x=g+h$, o sia $x-g-h=0$: se si divide l'equazione $x^3-3ghx-$ ec. per $x-g-h$, si troverà per quoto l'equazione del secondo grado $xx+(g+h)x+g^2+h^2-gh=0$: dalla quale si ricava facilmente $x=\frac{-(g+h)}{2}\pm\frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}$.

Quindi, le tre radici dell'equazione $x^3+px+q=0$, o sia della trasformata $x^3-3ghx-g^3-h^3=0$, sono $x=g+h$,

$$x=\frac{-(g+h)}{2}+\frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}, \ldots$$

$$x=\frac{-(g+h)}{2}-\frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$ Si elimineranno g ed h per mezzo de' loro valori.

222. Egli è visibile, che la prima radice è reale, e che le due altre sono immaginarie, quando g ed h sono quantità reali. Ora g ed h sono reali, allorchè la quantità radicale $\sqrt{\left\{\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right\}}$ è

reale; e questa quantità è reale in due casi.

1.° Quando p è positivo; perchè allora il cubo $\frac{p^3}{27}$ è altresì positivo, e che aggiungendo questo cubo al quadrato $\frac{qq}{4}$ (che è sempre positivo, quand' anche la quantità q fosse negativa) si ha una somma positiva, la cui radice quadrata è per conseguenza reale.

2.° Quando p essendo negativo, o quando l' equazione avendo questa forma $x^3 - px + q = 0$, si ha $\frac{qq}{4} > \frac{p^3}{27}$; perchè la quantità radicale del secondo grado, che è presentemente $\sqrt{\left\{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right\}}$, è ancora reale.

Dunque concludiamo, 1.° che tutte le equazioni del terzo grado, che hanno questa forma $x^3 + px + q = 0$, hanno una sola radice reale, e che le altre due sono immaginarie.

2.° Che le equazioni di questa for-

ma $x^3 - px + q = o$ sono ancora nel medesimo caso, purchè sia $\frac{qq}{4} > \frac{p^3}{27}$.

223. Se nell' ipotesi che il termine px sia preceduto dal segno $-$, o che l' equazione sia di questa forma $x^3 - px + q = o$, si avrà $\frac{qq}{4} = \frac{p^3}{27}$, la quantità radicale $\sqrt{\left\{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right\}}$ sparirà, e si avrà $g = h$. Onde ne segue che il termine $\frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}$ svanisce sia che prendasi in $+$ o in $-$. Per conseguenza le tre radici dell' equazione sono reali, e di più le due ultime sono eguali tra loro. Queste tre radici sono (eliminando g ed h), $x = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, $x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, $x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$.

224. Supponiamo sempre l' equazione $x^3 - px + q = o$; ma sia ora

$\frac{qq}{4} < \frac{p^3}{27}$. Allora la quantità radicale $\sqrt{\left\{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right\}}$ diventa immaginaria: e le due quantità g ed h sono altresì immaginarie separatamente, poichè ciascuna di esse racchiude nella sua espressione una parte immaginaria che rende tutto immaginario. Tuttavia non si deve perciò concludere che alcuna delle radici dell'equazione sia immaginaria; esse sono al contrario tutte tre reali. Ecco un mezzo per convincersene.

Rappresentiamo, per abbreviare il calcolo, la quantità radicale immaginaria $\sqrt{\left(\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$, o sia $\sqrt{\left(\left(\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}\right) \times -1\right)}$, con $\sqrt{-kk}$, o sia $k\sqrt{-1}$, essendo k una quantità reale $= \sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}\right)}$, rappresentiamo di più l'ultimo termine $+q$ dell'equazione, con $2f$: si avrà

$$g = \sqrt[3]{(-f + k\sqrt{-1})}, h = \sqrt[3]{[-f - k\sqrt{-1}]}.$$

Per conseguenza le tre radici dell' equazione saranno:

$$\text{I.}\quad x = \sqrt[3]{[-f+k\sqrt{-1}]} + \sqrt[3]{[-f-k\sqrt{-1}]}\,;$$

$$\text{II}\ x = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{[-f+k\sqrt{-1}]} + \sqrt[3]{[-f-k\sqrt{-1}]}\right)$$
$$+\frac{\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{[-f+k\sqrt{-1}]} - \sqrt[3]{[-f-k\sqrt{-1}]}\right)$$

$$\text{III.}\ x = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{[-f+k\sqrt{-1}]} + \sqrt[3]{[-f-k\sqrt{-1}]}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{[-f+k\sqrt{-1}]} - \sqrt[3]{[-f-k\sqrt{-1}]}\right).$$

Ora (continuando a servirsi delle lettere g, h, per denotare in un modo breve le espressioni radicali del terzo grado, che ne sono i valori) si vede 1.° che le quantità g, h, le quali d' altronde non differiscono l' una dall' altra che nel segno del termine $k\sqrt{-1}$, sono precedute dal medesimo segno + nella radice I. 2.° Che le medesime quantità g ed h entrano col medesimo segno, nella prima parte di ciascuna delle radici II. e III.; e con segni diversi, ma col medesimo moltiplicatore immaginario $\sqrt{-3}$, nella seconda parte di ciascuna delle stesse radici. Laon-

de risulta, che svolgendo g ed h in serie infinite, colla formola del binomio Newtoniano, tutti i termini affetti da $\sqrt{-1}$ si distruggeranno scambievolmente per l' opposizione de' segni, nell' espressione $g+h$; ed al contrario non resteranno che i soli termini affetti da $\sqrt{-1}$, nell'espressione $g-h$. Da un altro canto si osserverà che il prodotto $(\sqrt{-3})\times(\sqrt{-1})$, i cui due fattori sono immaginarj, forma il risultato reale $-\sqrt{3}$. Dopo queste considerazioni si troveranno per le tre radici proposte, le espressioni seguenti che non contengono alcuna quantità immaginaria, e che formano delle serie convergenti, essendo supposta $f > k$:

$$\text{I. } x = 2\sqrt[3]{f}\times\left(-1-\frac{k^2}{9f^2}+\frac{10k^4}{243f^4}-\frac{154k^5}{6561f^6}+\text{ec.}\right);$$

$$\text{II. } x = -\sqrt[3]{f}\times\left(-1-\frac{k^2}{9f^2}+\frac{10k^4}{243f^4}-\frac{154k^6}{6561f^6}+\text{ec.}\right)$$

$$+\frac{k\sqrt{3}}{\sqrt[3]{f^2}}\times\left(-\frac{1}{3}+\frac{5k^2}{8f^2}-\frac{22k^4}{729f^4}+\text{ec.}\right);$$

$$\text{III. } x = -\sqrt[3]{f} \times \left(-1 - \frac{k^2}{9f^2} + \frac{10k^4}{243f^4} - \frac{154k^6}{6561f^6} + \text{ec} \right)$$

$$- \frac{k\sqrt{3}}{\sqrt[3]{f^2}} \times \left(-\frac{1}{3} + \frac{5k^2}{81f^2} - \frac{22f^4}{729f^4} + \text{ec.} \right).$$

Se fosse $k > f$: bisognerebbe nell' elevare il binomio $-f \pm k\sqrt{-1}$ alla potenza $\frac{1}{3}$, riguardare il termine $\pm k\sqrt{-1}$ come il primo. Allora (facendo de' calcoli totalmente simili ai precedenti, e considerando che $\sqrt[3]{(\pm k\sqrt{-1})} = \pm \sqrt[3]{k} \times \sqrt[3]{(\sqrt{-1})} = \pm \sqrt[3]{k} \times -1 \times \sqrt{-1} = \mp \sqrt[3]{k} \times \sqrt{-1}$) si troverebbe per la prima radice, $x = \frac{2f}{\sqrt[3]{k^2}} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{5f^2}{81k^2} + \frac{22f^4}{729k^4} - \text{ec.} \right)$ e per le due altre . . . .

$$x = -\frac{f}{\sqrt[3]{k^2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{5f^2}{81k^2} + \frac{22f^4}{729k^4} - \text{ec.} \right)$$

$$\pm\sqrt[3]{k}\,\sqrt{3}.\left(1+\frac{f^2}{9k^2}-\frac{10f^4}{243k^4}+\frac{154f^6}{6561k^6}-\text{ec.}\right).$$

Questi valori non contengono ancora nulla d'immaginario, e formano delle serie convergenti.

Finalmente se fosse $k=f$, le espressioni che si troverebbero per le radici, con prendere $-f$ oppure $k\sqrt{-1}$ pel primo termine de' radicali cubici da svolgersi, sarebbero ancora reali; e di più convergerebbero, ma più lentamente.

Recapitolazione dell'articolo precedente.

225. Allorchè si ha l'equazione $x^3 - px + q = 0$: nella quale p è una quantità positiva; q una quantità positiva o negativa; e $\frac{p^3}{27} > \frac{qq}{4}$: allora le tre radici sono reali ed ineguali tra loro. La forma, sotto la quale si trovano immediatamente, contiene delle parti immaginarie; ma svolgendo le loro espressioni le parti immaginarie si annichilano reciprocamente per l'opposizio-

ne de' segni, ed il risultato di ciascun aggregato forma una quantità reale. Non si sono per anche potute esprimere *in generale* queste radici per mezzo di formole algebriche finite che non contenessero nulla d'immaginario; ed è ciò che ha fatto dare a questo caso il nome di *caso irreducibile del terzo grado*.

Ho detto *in generale*: poichè vi sono delle equazioni particolari della forma

$$x^3 - px + q = 0, \text{ dove si ha } \frac{p^3}{27} > \frac{qq}{4},$$

e dove tuttavia le radici possono essere rappresentate da espressioni finite, libere da ogni quantità immaginaria. Ciò avviene allorchè le parti della radice, comprese sotto i radicali cubici, sono de' cubi perfetti; perciocchè allora cavando le radici cubiche, le parti immaginarie si distruggono per l'opposizione de' segni.

Applichiamo tutta questa teoria generale ad alcuni esempi.

226. Problema II. *Un uomo mette* 900 *lire in un commercio, ed al termine di tre anni riceve* 1089 *lire: si domanda*

a quanto per 100 *monti il guadagno che ha fatto?*

Sia u il guadagno cercato. Egli è chiaro, che il guadagno ricavato dalle 900 lire al termine del primo anno, sarà il quarto termine d'una proporzione, di cui 100, u e 900 sono i tre primi termini. Questo guadagno sarà dunque espresso da $\frac{900 \times u}{100}$; e per conseguenza la somma che tocca al nostro negoziante, alla fine del primo anno, è $900 + \frac{900 \times u}{100}$, o sia $900 \times \frac{100 + u}{100}$. Similmente la somma che gli tocca alla fine del secondo anno, è $900 \times \frac{100+u}{100} \times \frac{100+u}{100}$; quella che gli tocca alla fine del terzo anno, è $900 \times \frac{100 + u}{100} \times \frac{100 + u}{100} \times \frac{100 + u}{100}$. Ora per ipotesi, quest' ultima somma deve essere 1089. Quindi si ha l' equazione . . . .

$$900 \times \frac{100+u}{100} \times \frac{100+u}{100} \times \frac{100+u}{100} = 1089,$$

che si riduce a $(100+u)^3 = 1210000$. Dunque, se si suppone $100+u=y$, si avrà $y^3 = 1210000$: equazione che si riferisce a quella dell'articolo 219, con fare $c = -1210000$. Caviamo la radice cubica dall'una e dall'altra parte; avremo $y = 106,56$, ad un di presso. Dunque $u = 6,56$, sensibilmente. Se si valuta la frazione decimale 0,56 in soldi e denari, si troverà che essa vale $11^{s.}\ 2^{d.}\frac{2}{3}$. Quindi, il guadagno che il negoziante ha fatto, monta a $6^{l.}\ 11^{s.}\ 2^{d.}\frac{4}{5}$ per 100 lir. ad un di presso.

227. Problema III. *Un uomo mette* 900 *lire in un commercio; al termine di tre anni riceve una quantità di denaro tale, che aggiungendola a quella che gli toccherebbe alla fine del primo anno, si avrebbe* 2400 *lire per somma: trovare a quanto per* 100 *monti il guadagno che egli ha fatto?*

Sia u il guadagno cercato. Ragionando come nel problema precedente, si vede che la quantità di denaro, dovuta al negoziante, alla fine del primo

anno, è $\frac{900\times(100+u)}{100}$; e che la quantità dovutagli alla fine del terzo anno, è $\frac{900\times(100+u)^3}{1000000}$. Quindi si avrà, per le condizioni del problema, ...

$$\frac{900\times(100+u)^3}{1000000}+\frac{900\times(100+u)}{100}=2400.$$

Sia $100+u=x$. Si avrà dopo le riduzioni, $x^3+10000x-\frac{8000000}{3}=0$: equazione che si riferisce alla formola $x^3+px+q=0$ dell' articolo 221, col fare $p=10000$, $q=-8000000$. E siccome qui la quantità p è positiva, ne segue (222) che l'equazione non ha che una sola radice reale, e che le due altre sono immaginarie. Sostituendo in luogo di p e q, i loro valori numerici nella prima espressione generale di x, trovata (221), si avrà per la radice

reale $x=\sqrt[3]{\left(\frac{4000000}{3}+\frac{1000000}{3}\sqrt{\frac{49}{3}}\right)}$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{4000000}{3}-\frac{1000000}{3}\sqrt{\frac{49}{3}}\right)}.$$

Ora la radice quadrata della frazione $\frac{49}{3}$ è 4,0414, ad un dipresso. La prima parte di x sarà dunque $\sqrt[3]{\frac{8041400}{3}}$, cioè a dire, 138,615 circa; e la seconda sarà $\sqrt[3]{-\frac{41400}{3}}$, cioè a dire $-23,986$ circa. Dunque $x = 114,929$ sensibilmente. Quindi a motivo di $100+u=x$, si avrà $u=14.929$. Valutando la frazione decimale 0,929 in soldi e denari, si troverà che essa vale $18^{s.}\ 6^{d.}\ \frac{24}{25}$. Conseguentemente il guadagno che ha fatto il negoziante, monta a $14^{l.}\ 18^{s.}\ 6^{d.}\frac{24}{25}$, per 100, sensibilmente.

228. PROBLEMA IV. *Trovare un numero, il cui cubo aggiunto al prodotto dello stesso numero per* 45, *dia* 100 *per somma?*

Sia x il numero cercato. Si avrà l' equazione $x^3+45x=100$, ovvero $x^3+45x-100=0$, che si riferisce

alla formola $x^3 + px + q = 0$: facendo $p = 45$, $q = -100$. Questa equazione (222) ha una radice reale, e le altre due immaginarie. Assoggettandola alla formola generale dell'artic. 221, e mettendo in luogo delle quantità letterali, i loro valori numerici, si troverà

$$x = \sqrt[3]{[50 + 5\sqrt{235}]} + \sqrt[3]{[50 - 5\sqrt{235}]}.$$

229 PROBLEMA V. *Risolvere l' equazione* $y^3 + 6y^2 - 18y + 10 = 0$?

Cominciando a fare svanire il secondo termine da questa equazione, con supporre $y = x - 2$, avremo la trasformata $x^3 - 30x + 62 = 0$, che si riferisce alla formola $x^3 - px + q = 0$.

E siccome quì si ha $\frac{qq}{4} < \frac{p^3}{27}$, ne segue (224) che le altre radici dell' equazione sono reali. Il valore prossimo d' una di esse è pel medesimo articolo, ...

$$x = \frac{2f}{\sqrt[3]{f^2}} \times \left(-1 - \frac{k^2}{9f^2} + \frac{10k^4}{243f^4} - \frac{154k^4}{6561f^6} + \text{ec.}\right);$$ e noi abbiamo quì

$f = \frac{q}{2} = 31$, $f^2 = 961$, $k^2 = 39$. Laonde si vede che la formola converge rapidamente. Quindi ci possiamo contentare di prendere i suoi tre primi termini; ed allora si avrà dopo alcune riduzioni, $x = \frac{-486 f^4 - 54 k^2 f^2 + 20 k^4}{243 f^3 \sqrt[3]{f^2}}$, cioè a dire, mettendo in vece delle grandezze letterali i loro valori numerici, $x = -6,311$.

Le altre due radici dell' equazione possono trovarsi colle altre formole dell' articolo citato. Ma è più comodo nella pratica di far servire a questa ricerca la radice già trovata: operazione che consiste nel dividere l' equazione .... $x^3 - 30x + 62 = 0$, per $x + 6,311$. Con ciò si trova il quoto $xx - 6,311\,x + 9,828721$, ed il residuo $0,02905823$, che è abbastanza piccolo per poter essere trascurato. Si avrà dunque ad un di presso $xx - 6,311\,x + 9,828721 = 0$: equazione del secondo grado, che dà sensibilmente queste due radici $x = 2,7971$,

$x = 3{,}5139$. Quindi i tre valori di y sono ad un di presso $y = -8{,}311$, $y = 0{,}7971$, $y = 1{,}5139$.

230. Il metodo dato per risolvere le equazioni del terzo grado, si estende a tutte le equazioni della forma $u^{3n} + au^{2n} + bu^n + c = 0$: poichè facendo $u^n = y$, si ha la trasformata $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, che è del terzo grado. Conoscendo y, si conoscerà altresì u; poichè $u = y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$.

231. Per esercizio dei giovani aggiungeremo i seguenti problemi.

1.° Trovare un numero che moltiplicato per la sua radice più 3, faccia 5.

2.° Trovare tre numeri, il secondo de' quali sia 2 più del primo, ed il terzo 2 più del secondo, e che moltiplicato il primo nel secondo, ed il prodotto nel terzo, faccia 1000.

3.° Si cerca una quantità irrazionale, che moltiplicata per la sua radice più 40, faccia un numero razionale.

4.° Trovare una quantità irrazionale che moltiplicata per 30 meno la radice della quantità, faccia un numero razionale.

5.° Si cerca un numero che aggiunto con il quadruplo della sua radice cuba faccia tredici.

6.° Due fecero conpagnia, e posero non so quanti scudi, e guadagnarono il cubo della decima parte del suo capitale; e se avessero guadagnato 3 meno di quello che guadagnarono avrebbero guadagnato tanto quanto fu il capitale. Si domanda il guadagno, e capitale posto in società.

7.° Spezzar 10 in quattro continue parti proporzionali, e che la prima sia 2.

8.° Trovare quattro numeri continui proporzionali, che il primo sia 2, il secondo e quarto sommati insieme facciano 10.